Деление пространства

Интерактивный комплект для развития воображения,
освоения метода математической индукции,
освоения метода формирования понятий по аналогии
и обнаружения межпредметных связей между алгеброй, планиметрией и стереометрией.

Рекомендации по применению комплекта

Этот комплект может быть использован как основа учебного проекта ученика, основа исследования, представляемого учеником на математический конкурс. Его можно использовать на уроках в классе с углубленным изучением математики. В этом случае задания комплекта предлагаются поочередно в течение ряда уроков, каждое следующее задание даётся на дом. На уроке учитель разбирает сделанное учениками, выполняет следующий шаг и даёт задание к очередному уроку. В зависимости от реальной ситуации, учитель решает, до какой задачи можно дойти всем классом, какие целесообразно дать на факультативе и какие можно только дать для индивидуальной исследовательской работы отдельным «звёздочкам». Может быть, полезен доклад ученика по одной из последних задач.

Базовая задача

Найдите число частей, на которые объекты размерности $(n - 1)$ делят n -мерное пространство.

Метод решения

Обобщение решения, очевидного для одномерного случая, на двумерный и трёхмерный случаи.

Необходимые знания

Представление о методе математической индукции и его шагах.

Понятия: прямые и сферы общего и почти общего положения.

Сумма арифметической прогрессии.

Метод неопределённых коэффициентов.

Метод двойного расчёта. Пример: чтобы найти число k диагоналей выпуклого n-угольника, считаем число их концов. Оно равно $2k$, так как у каждой диагонали два конца. Оно равно $n\ (n - 3)$, так как из каждой из n вершин выходит $(n - 3)$ диагонали. Значит, $k = n\ (n - 3)/2$.

Деление линии точками

Задание. Найдите число частей, на которые делят прямую n точек.

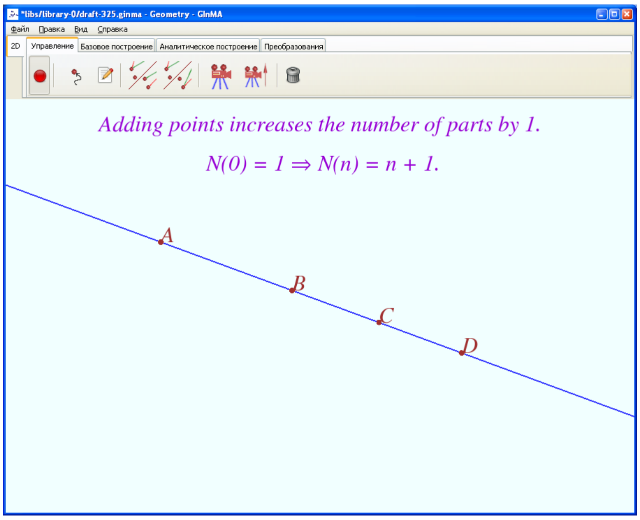
Рассмотрим случаи, когда на прямой нет точек, одна точка, две, три,… Число частей соответственно 1,2,3,… Гипотеза $N(n) = n + 1$. База индукции $N(1) = 2$.

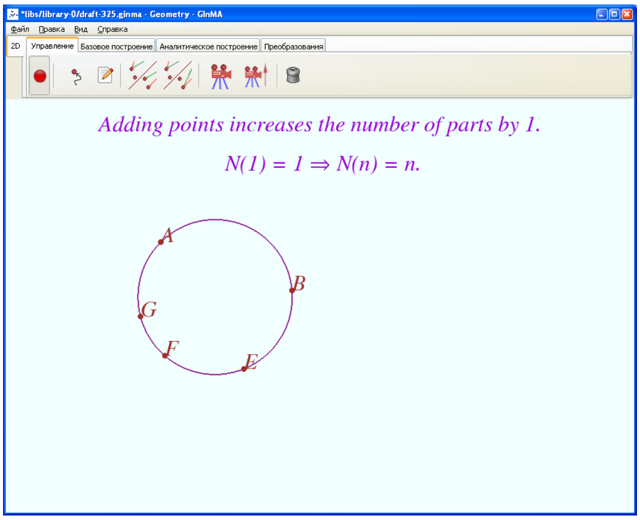
Индукционный шаг: добавление точки увеличивает число частей на 1. То есть:

$$N(n + 1) = N(n) + 1 = (n + 1) +1.$$

Вывод индукции о справедливости найденной формулы.

Закрепление материала. Найдите число частей, на которые делят окружность n точек. Ответ: $N(n) = n + 1$.





Разбиение плоскости на части прямыми

Используемое понятие Прямые общего положения – это прямые, которые попарно пересекаются, причём никакие три прямые в одной точке не пересекаются.

Задание. Найдите число частей, на которые делят плоскость $\boldsymbol{n}$ прямых общего положения.

Рассмотрим случаи, когда прямых нет, одна прямая, две, три,… Число частей соответственно $N(0) = 1$, $N(1) = 2$, $N(2) = 4$, $N(3) = 7$, $N(4) = 11$,...

Исследуем найденные числа и замечаем, что $N(n + 1) = N(n) + (n + 1)$.

Доказываем этот факт, замечая, что $(n + 1)$-ая прямая пересекает каждую из остальных n прямых и делится ими на $(n + 1)$ часть. Каждая часть прямой добавляет к разбиению плоскости одну часть.

Вспоминаем формулу суммы арифметической прогрессии и получаем:

$$N(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Индукционный шаг: добавление точки увеличивает число частей на $(n + 1)$. То есть:

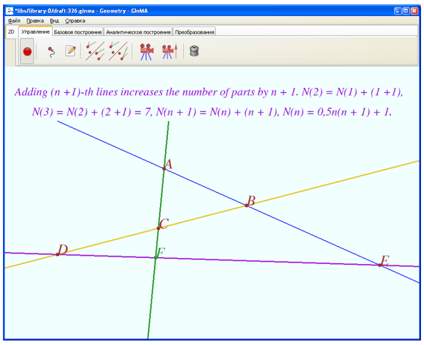
$$N(n + 1) = N(n) + (n + 1);\quad N(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1\,.$$

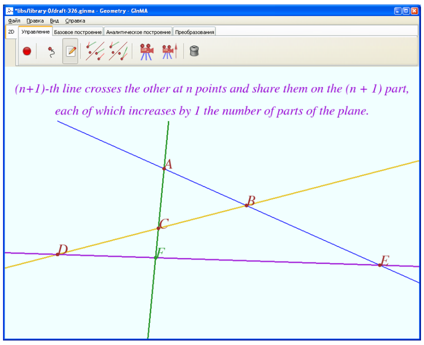
Вывод индукции о справедливости найденной формулы.

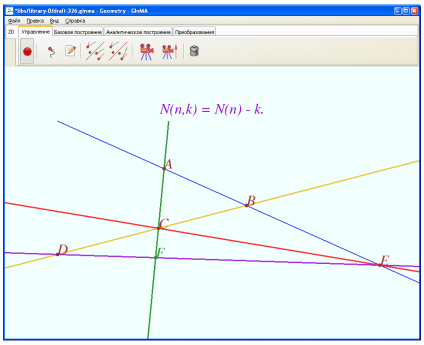
Закрепление материала. Найдите число частей, на которые делят плоскость n прямых почти общего положения, если число точек, в которых пересекаются ровно три прямые, равно k.

Используемое понятие Прямые почти общего положения – это прямые, которые попарно пересекаются, причём существует k точек, в которых пересекаются ровно 3 прямые, и нет точек, в которых пересекается большее число прямых.

Результат $N(n,k) = N(n) – k$, так как исчезает ровно k треугольных частей.







Разбиение плоскости или сферы на части окружностями

Используемое понятие Окружности общего положения – это окружности, которые попарно пересекаются, причём никакие три окружности в одной точке не пересекаются.

Задание. Найдите число частей, на которые делят плоскость $\boldsymbol{n}$ окружностей общего положения.

Рассмотрим случаи, когда одна окружность, две, три,… Число частей соответственно $N(1) = 2$, $N(2) = 4$, $N(3) = 8$, $N(4) = 14$,...

Исследуем найденные числа и замечаем, что $N(n + 1) = N(n) + 2n$.

Доказываем этот факт, замечая, что $(n + 1)$-ая окружность пересекает каждую из остальных $\boldsymbol{n}$ окружностей в двух точках и делится ими на $2n$ частей. Каждая из этих частей добавляет к разбиению плоскости одну часть.

Вспоминаем формулу суммы арифметической прогрессии и получаем: $N(n) = n^2 - n + 2$.

Индукционный шаг: добавление точки увеличивает число частей на $2n$. То есть:

$$N(n + 1) = N(n) + 2n = n^2 - n + 2 + 2n = n^2 + n + 2 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 2.$$

Вывод индукции о справедливости найденной формулы.

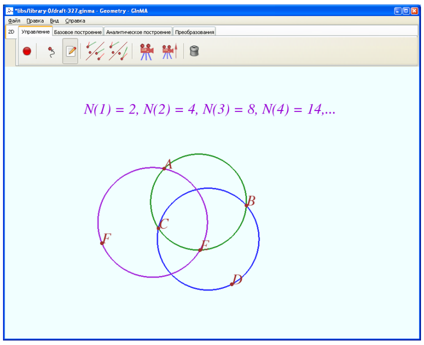
Закрепление материала. Найдите число частей, на которые делят плоскость $\boldsymbol{n}$ окружностей почти общего положения, если число точек пересечения трёх окружностей равно $\boldsymbol{k}$.

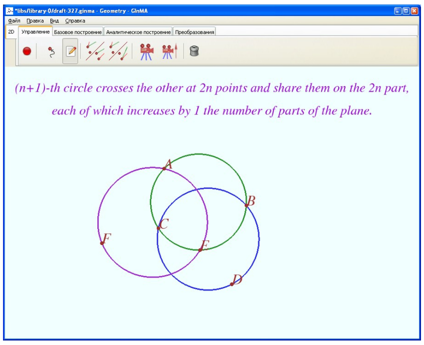
Используемое понятие (предложите ученикам его сформулировать). Окружности общего положения – это окружности, которые попарно пересекаются, причём существует $\boldsymbol{k}$ точек, в которых пересекаются 3 окружности, и нет точек, в которых пересекается большее число окружностей.

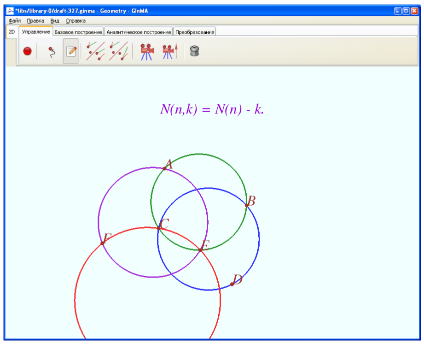
Ответ: $N(n,k) = N(n) - k$, так как исчезает ровно $\boldsymbol{k}$ треугольных частей.

Закрепление материала. Найдите число частей, на которые делят сферу $\boldsymbol{n}$ окружностей почти общего положения, если число точек пересечения трёх окружностей равно $\boldsymbol{k}$.

Ответ: $N(n) = n^2 - n + 2$, $N(n,k) = N(n) - k$.







Разбиение выпуклого многоугольника на части диагоналями

Задание. Найдите число частей, на которые разбивают выпуклый n–угольник все его диагонали, если никакие три не пересекаются в одной точке.

Рассмотрим случаи треугольника, четырёхугольника, пятиугольника,… Число частей соответственно $N(3) = 1$, $N(4) = 4$, $N(5) = 11$, $N(6) = 25$,...

Добавляем к выпуклому n–угольнику $(n + 1)$-ую вершину, разместив её вблизи одной из сторон.

Добавление вершины добавило одну часть. Проводим из неё $(n - 2)$ диагонали. Они пересекут имеющиеся диагонали и сторону в $C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ точках (каждая точка пересечения определяется тремя вершинами из n). Каждая диагональ добавляет части в количестве равном числу точек пересечения плюс один. Значит

$$N(n+1) = N(n) + 1 + (n-2) + C_n^3 = \frac{(n-1)(n^2-2n+6)}{6}.$$

Задаемся вопросом о виде искомой формулы. Добавлялась 1 или 2 части – формула линейная. Добавлялось n или $2n$ частей – формула квадратичная. Сейчас, когда добавляется n^3, можно ожидать четвёртую степень $N(n) = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$. Поскольку $N(1) = N(2) = 0$, проверим упрощенную формулу $N(n) = (n - 1)(n - 2)(An^2 + Bn + C)$.

$$\begin{cases} 2(9A+3B+C) = 1 \\ 6(16A+4B+C) = 4 \\ 12(25A+5B+C) = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 0{,}5 - 9A - 3B \\ 7A + B = \dfrac{1}{6} \\ 9A + B = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad A = \frac{1}{24}, B = -\frac{1}{8}, C = \frac{1}{2}$$

$$N(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$$

Индукционный шаг:

$$N(n+1) = N(n) + \frac{(n-1)(n^2-2n+6)}{6} = \frac{n(n-1)((n+1)^2 - 3(n+1) + 12)}{24}$$

Вывод индукции о справедливости найденной формулы.

Разбиение пространства на части плоскостями

Задание. Найти, на сколько частей делят пространство n плоскостей общего положения.

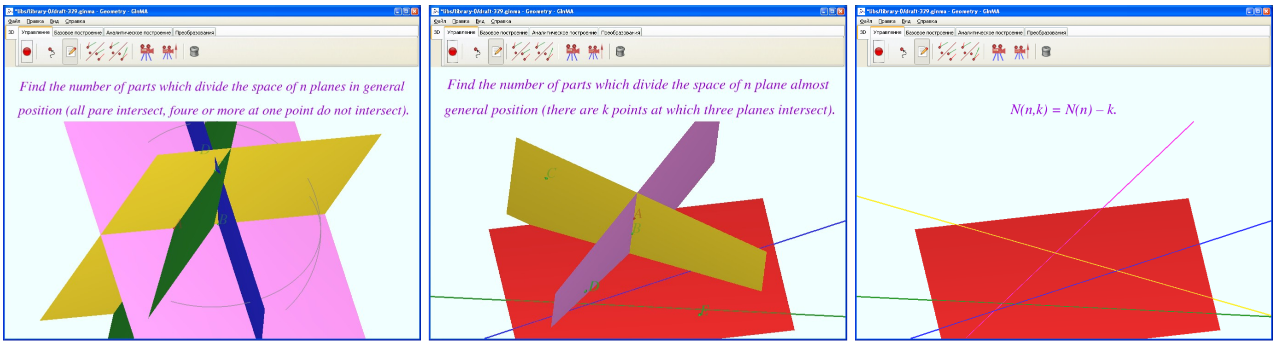
Используемое понятие (предложите ученикам его сформулировать). Плоскости общего положения – это плоскости, которые попарно пересекаются, причём никакие четыре плоскости в одной точке не пересекаются.

Рассмотрим случаи, когда одна плоскость, две, три,… Число частей соответственно

$N(0) = 1$, $N(1) = 2$, $N(2) = 4$, $N(3) = 8$, $N(4) = 15$, $N(5) = 26$,...

Пусть четыре плоскости задают точки ***A,B,C,D***. Тогда ***1*** часть - это внутренность тетраэдра ***ABCD***. ***4*** части определяют трехгранные углы точек ***A,B,C,D***. ***6*** частей определяют двугранные углы рёбер ***AB,AC,AD,.BC,BD,CD***. ***4*** части имеют «основаниями» грани ***ABC***, ***ABD,ACD,BCD***. Всего ***15*** частей.

Пятая (красная) плоскость добавлена на третьем шаге. Затем остальные плоскости удалены и оставлены их следы на пятой. Легко видеть 11 частей, на которые прямые, следы четырёх плоскостей, делят пятую плоскость, и понятно, что $N(5) = N(4) + 11 = 26$.



Исследуем процесс добавления $(n + 1)$-ой плоскости. Замечаем, что $(n + 1)$-ая плоскость пересекает каждую из остальных n плоскостей по прямой. На ней оказываются нанесены n прямых, которые делят её на $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ частей. Каждая из этих частей добавляет к разбиению пространства одну часть. $N(n + 1) = N(n) + \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Задаемся вопросом о виде искомой формулы. Добавлялась 1 или 2 части – формула линейная. Добавлялось n или $2n$ частей – формула квадратичная. Сейчас, когда добавляется n^2, можно ожидать кубическую формулу вида $N(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + 1$ (так как $N(0) = 1$).

Система уравнений метода неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases} A + B + C = 2 - 1 = 1 \\ 8A + 4B + 2C = 4 - 1 = 3 \\ 27A + 9B + 3C = 8 - 1 = 7 \end{cases} \begin{cases} C = 1 - A - B \\ 6A + 2B = 3 - 2 = 1 \\ 18A + 4B = 7 - 3 - 1 = 3 \end{cases} \quad A = \frac{1}{6}, B = 0, C = \frac{5}{6}.$$

Ожидаемая формула $N(n) = \dfrac{n(n^2+5)}{6} + 1$.

Индукционный шаг:

$$N(n+1) = N(n) + \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n(n^2+5)}{6} + 1 + \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{(n+1)((n+1)^2+5)}{6} + 1.$$

Вывод индукции о справедливости найденной формулы.

Закрепление материала. Найдите число частей, на которые делят пространство ***n*** плоскостей почти общего положения, если число точек пересечения трёх плоскостей равно ***k***.

Используемое понятие (предложите ученикам его сформулировать). Плоскости почти общего положения – это плоскости, которые попарно пересекаются, причём число точек пересечения четырёх плоскостей равно ***k*** и нет точек, в которых пересекается большее число плоскостей.

Ответ: $N(n) = \dfrac{n(n^2+5)}{6} + 1$, $N(n,k) = N(n) - k$.

Разбиение пространства на части сферами

Задание. На сколько частей разделят пространство ***n*** сфер общего положения.

Используемое понятие (предложите ученикам его сформулировать). Сферы общего положения – это сферы, которые попарно пересекаются, причём никакие четыре сферы в одной точке не пересекаются.

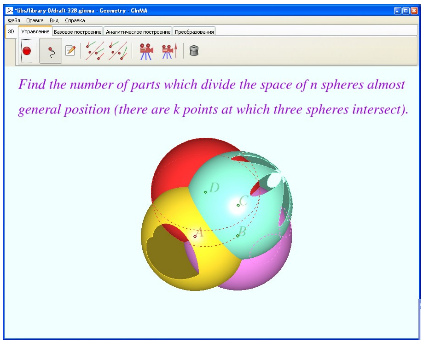
Рассмотрим случаи, когда сфер одна, две, три,… Число частей соответственно

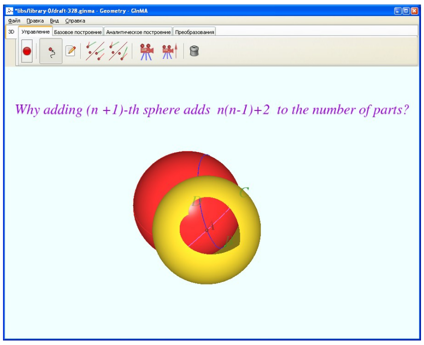
$N(1) = 2$, $N(2) = 4$, $N(3) = 8$, $N(4) = 16$, $N(5) = 30$, $N(6) = 52$...

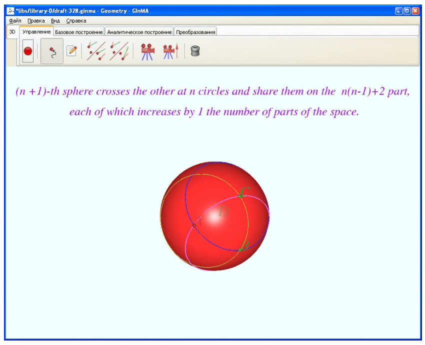
Если сфер три, то ***1*** часть внутри всех, ***3*** части внутри пар, ***3*** части внутри только одной сферы и ***1*** часть вне сфер. Всего ***8*** частей.

Если сфер четыре, то ***1*** часть внутри всех, ***4*** части внутри троек сфер, ***6*** частей внутри пар сфер, ***4*** части внутри только одной сферы и ***1*** часть вне сфер. Всего ***16*** частей.

Четвёртая (красная) сфера добавлена на четвёртом шаге. Затем остальные сферы удалены, и оставлены их следы на четвёртой. Легко видеть 8 частей, на которые окружности, следы трёх сфер, делят четвёртую. ***1*** часть криволинейный треугольник ABC, ***3*** части треугольники, прилегающие к его рёбрам, ***3*** части прилегают к его вершинам и ***1*** часть вне кругов. Всего ***8*** частей. Понятно, что $N(4) = N(3) + 8 = 16$.







Исследуем процесс добавления $(n+1)$-ой сферы. Замечаем, что $(n+1)$-ая сфера пересекает каждую из остальных n сфер по окружности. На ней нанесены n окружностей, которые делят её на $n^2 - n + 2$ частей. Каждая из этих частей добавляет к разбиению пространства одну часть. $N(n+1) = N(n) + n^2 - n + 2$.

Вновь можно ожидать кубическую формулу вида $N(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$.

Система уравнений метода неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases} A+B+C+D=2 \\ 8A+4B+2C+D=4 \\ 27A+9B+3C+D=8 \\ 64A+16B+4C+D=16 \end{cases} \begin{cases} D=2-A-B-C \\ 7A+3B+C=2 \\ 19A+5B+C=4 \\ 37A+7B+C=8 \end{cases} \begin{cases} D=2-A-B-C \\ C=2-7A-3B \\ 12A+2B=2 \\ 18A+2B=4 \end{cases} \quad A=\frac{1}{3}, B=-1, C=\frac{8}{3}, D=0.$$

Ожидаемая формула $N(n) = \dfrac{n(n^2-3n+8)}{3}$. $N(7) = 84$, $N(8) = 128$, $N(9) = 186$, $N(10) = 260$.

Индукционный шаг:

$$N(n+1) = N(n) + n^2 - n + 2 = \frac{n(n^2-3n+8)}{3} + n^2 - n + 2 = \frac{(n+1)((n+1)^2 - 3(n+1) + 8)}{3}.$$

Вывод индукции о справедливости найденной формулы.

Закрепление материала. Найдите число частей, на которые делят пространство n сфер почти общего положения, если число точек пересечения трёх сфер равно k.

Используемое понятие (предложите ученикам его сформулировать). Сферы почти общего положения – это сферы, которые попарно пересекаются, причём число точек пересечения четырёх сфер равно k, и нет точек, в которых пересекается большее число сфер.

Ответ: $N(n) = \dfrac{n(n^2-3n+8)}{3}$, $N(n,k) = N(n) - k$.

Пересечение четырёх сфер

Задание. Найти, на сколько частей разбивают пространство четыре равные сферы, центры которых лежат в вершинах правильного тетраэдра с ребром, равным их радиусу?

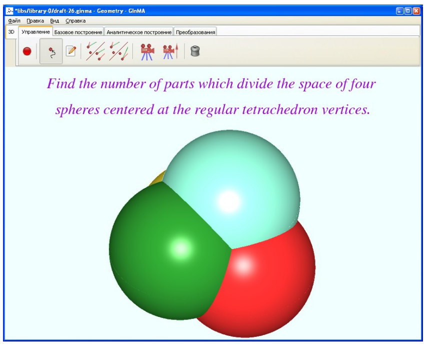
Доказано, что четыре сферы общего положения делят пространство на 16 частей. Являются ли рассматриваемые сферы сферами общего положения?

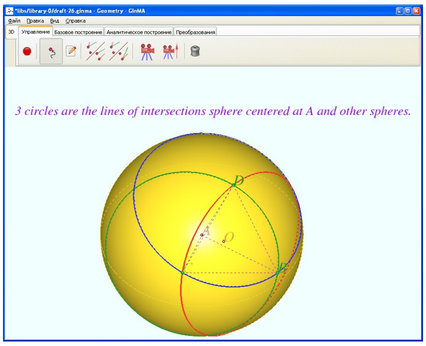
На рисунке сферы убраны и оставлены линии пересечения их со сферой с центром в точке ***A***.

На поверхности сферы всего три окружности, которые не имеют общей точки, то есть точки, удалённой от центров всех сфер на расстояние ***R***. Значит, число частей пространства равно 16.

Ответ: 16.

Учащиеся могут удалять сферы по одной и проверять след исчезнувшей сферы.





Пересечение пяти сфер

Найти, на сколько частей делят пространство 5 равных сфер, центры четырёх из которых лежат в вершинах правильного тетраэдра, а пятой - в точке, симметричной вершине относительно основания.

Пересечение шести сфер

Задание. Найти, на сколько частей делят пространство шесть равных сфер, центры которых лежат в вершинах правильного октаэдра с ребром, равным их радиусу.

Доказано, что шесть сфер общего положения делят пространство на 52 части. Являются ли рассматриваемые сферы сферами общего положения?

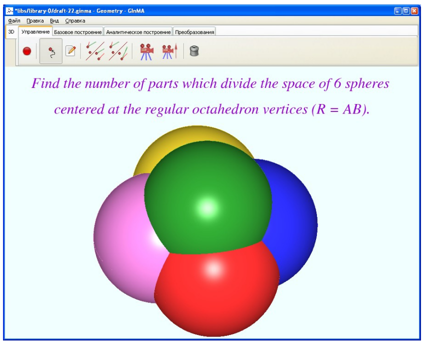
На рисунке сферы убраны и оставлены линии их пересечения со сферой с центром в точке ***A***.

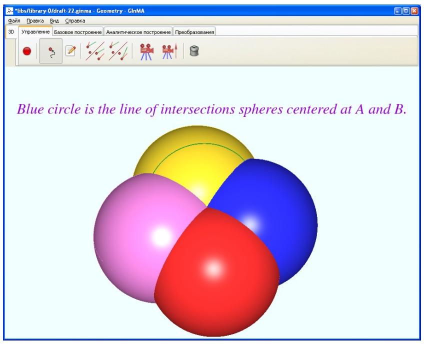
На поверхности сферы пять окружностей. Заметим, что существует 4 точки пересечения троек окружностей, которые имеют общую точку. Центры соответствующих четвёрок сфер расположены в вершинах квадратов.

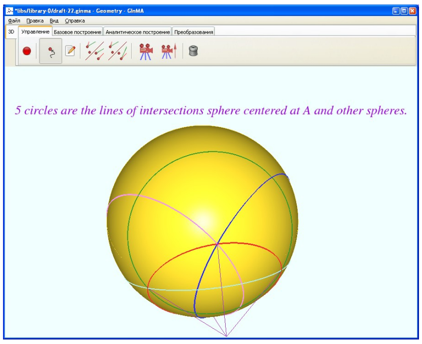
Чтобы найти количество точек, в которых пересекаются четвёрки сфер, применим метод двойного счёта. На поверхности каждой из шести сфер находятся 4 точки пересечения четвёрок сфер. Всего 24 сферо-точек. С другой стороны, через каждую из ***k*** точек проходят 4 сферы. Значит, $k = 4 \cdot 6 / 4 = 6$.

Сферы делят пространство на 52 – 6 = 46 частей.

Ответ: 46.







Пересечение восьми сфер

Задание. На сколько частей делят пространство восемь равных сфер, центры которых лежат в вершинах куба с ребром, равным их радиусу?

Доказано, что восемь сфер общего положения делят пространство на 128 частей. Являются ли рассматриваемые сферы сферами общего положения?

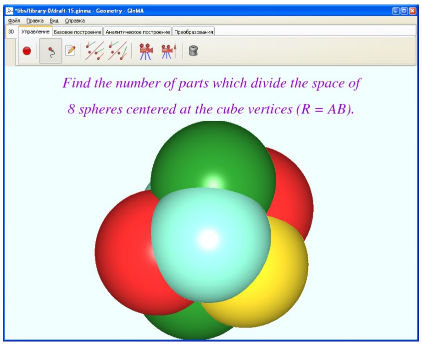
На рисунке сферы убраны и оставлены линии пересечения их со сферой с центром в точке ***A***.

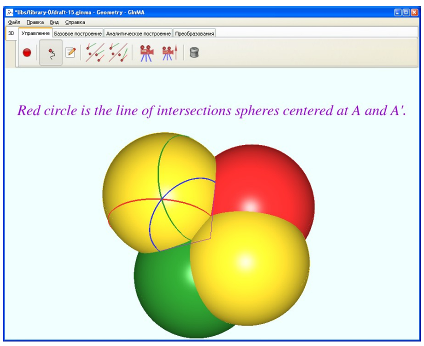
На поверхности сферы семь окружностей. Заметим, что существует 12 точек пересечения троек окружностей, которые имеют общую точку. 6 из них соответствуют сферам, центры которых в вершинах диагоналей куба, 3 – соседним сферам, 3 – противолежащим сферам.

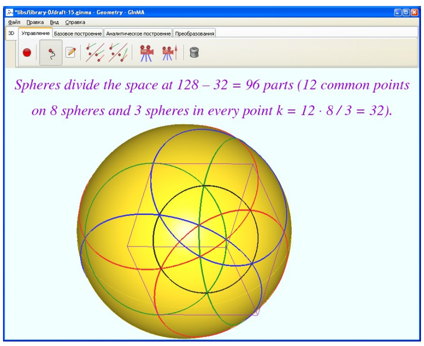
Предложите ученикам выполнить самостоятельно. Чтобы найти количество точек, в которых пересекаются четвёрки сфер, применим метод двойного счёта. На поверхности каждой из восьми сфер находятся 12 точек пересечения четвёрок сфер. Всего 96 сферо-точек. С другой стороны, через каждую из k точек проходят 4 сферы. Значит, $k = 12 \cdot 8 / 4 = 24$.

Сферы делят пространство на 128 – 24 = 104 части.

Ответ: 104.







Литература

1. Л.И. Головина, И.М. Яглом. Индукция в геометрии. М.: Физматгиз. 1961. – 101с.

2. И.Ф. Шарыгин. Геометрия 10-11 классы. М.: Дрофа, 2007. – 206с.