

Количество решений системы уравнений **Графический динамический метод**

Для нахождения количества решений системы уравнений, содержащих параметр, полезен следующий приём. Строим графики каждого из уравнений при некотором фиксированном значении параметра и находим число общих точек построенных графиков. **Каждая общая точка – это одно из решений системы.** Далее мысленно меняем параметр и представляем, как трансформируется график уравнения с параметром, как появляются и исчезают общие точки графиков. Такое исследование требует развитого воображения. Для тренировки воображения рассмотрим ряд типичных задач. Назовём особыми значениями параметра те значения, при которых изменяется число решений. Эти значения соответствуют ситуациям, когда графики решений касаются друг друга или угловая точка одного из графиков попадает на другой график. Как правило, при переходе через особую точку число решений изменяется на два, а в самой такой точке оно на единицу отличается от числа решений при небольшом изменении параметра.

Рассмотрим задачи, в которых требуется найти число решений системы уравнений, одно из которых зависит от параметра a , а другое не зависит. Переменные в системах x и y . Числа x_0, y_0, r считаем заданными константами. В ходе каждого решения, строим графики обоих уравнений. Исследуем, как изменяется график уравнения с параметром при изменении значения параметра. Затем делаем вывод о числе решений (общих точек построенных графиков). На интерактивном рисунке график уравнения без параметра показан синим цветом, а динамичный график уравнения с параметром показан красным цвета.

Для изучения темы (задания 1 – 7) используйте файл InMA 11, 2.5.2 Число решений системы с параметром.

Для исследований (задание 8) используйте файл GInMA Число решений системы с параметром.

1. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ (x - x_1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$
2. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ y = kx + a. \end{cases}$$
3. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ y = ax + y_1. \end{cases}$$
4. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} (|x| - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ (x - x_1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$
5. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + |y - y_0| = r; \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2. \end{cases}$$
6. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ y = |x - a| + y_1. \end{cases}$$
7. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} |x - x_0| + |y - y_0| = r; \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2. \end{cases}$$
8. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} f(x, y) = 0; \\ g(x, y, a) = 0. \end{cases}$$

1. Графики уравнений – гладкие кривые

1. Задание. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ (x - x_1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Решение: График первого уравнения – это окружность радиуса r с центром в точке $O(x_0; y_0)$. График второго уравнения – это окружность радиуса $|a|$ с центром на оси абсцисс в точке $A(x_1; 0)$. Центр окружности неподвижен, радиус определяет параметр. При увеличении модуля параметра окружность «раздувается».

Особые значения параметра – те значения, при которых изменяется число корней, то есть значения параметра, при которых окружность второго графика касается окружности первого.

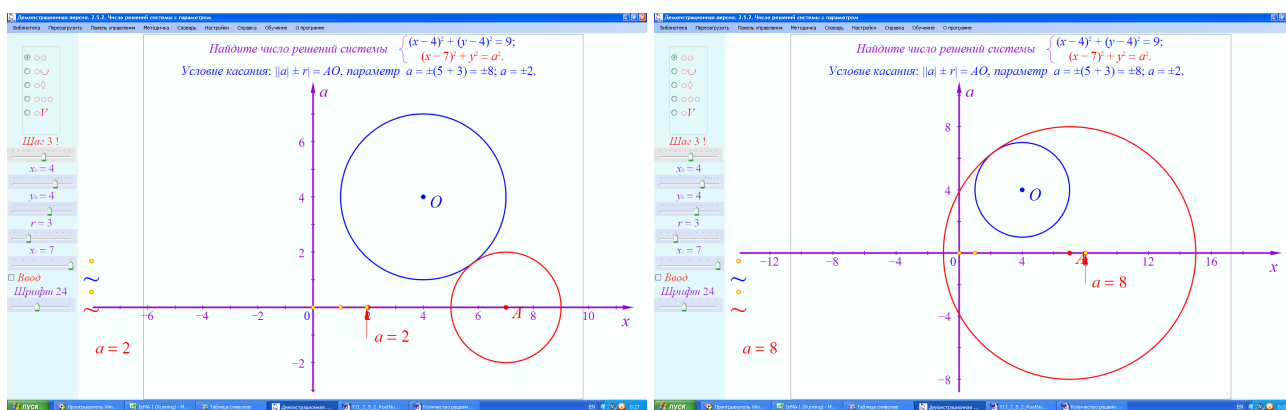
Условие касания окружностей – модуль суммы или разности радиусов окружностей равен межцентровому расстоянию:

$$||a| \pm r| = AO \Leftrightarrow a = \pm |AO \pm r|.$$

Исследование: Изменяя значение переменных и параметра, найдите число решений системы. Начать исследование желательно с простейших случаев $y_0 = 0$, когда общая ось окружностей горизонтальна, и $x_0 = x_1$, когда общая ось окружностей вертикальна. В общем случае пользуйтесь треугольниками Пифагора. Например, $|x_0 - x_1| = 3, y_0 = \pm 4$.

Типично, что как при малых по модулю, так и при больших по модулю значениях параметра решений нет. Поскольку две несовпадающие окружности могут иметь не более двух общих точек, число решений в общем случае не более двух. В точках касания число решений равно единице, при промежуточных значениях параметра – двум.

Творческое задание. Найдите то значение параметра, при котором три различные точки являются решениями системы уравнений
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - y_0)^2 = 9; \\ (x - x_1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$



2. Задание. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ y = kx + a. \end{cases}$$

Решение: График первого уравнения – это окружность радиуса r с центром в точке $O(x_0; y_0)$. График второго уравнения – это семейство параллельных прямых, проходящих через точки $A(0; a)$ и имеющих постоянный наклон. Тангенс угла наклона прямых равен k . При увеличении параметра прямые перемещаются вверх.

Особые значения параметра – те значения, при которых изменяется число корней, то есть значения параметра, при которых прямые касаются окружности.

Условие касания находим, приравнявая тангенсы угла наклона окружности и прямой. Решая полученное уравнение, находим координаты двух точек касания:

$$\frac{x_0 - x}{y - y_0} = k \Rightarrow k^2(y - y_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \pm \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}; \\ y = y_0 \mp \frac{r}{\sqrt{1+k^2}}. \end{cases}$$

Подставив полученные выражения в уравнение прямой, найдём значение параметра в особых точках:

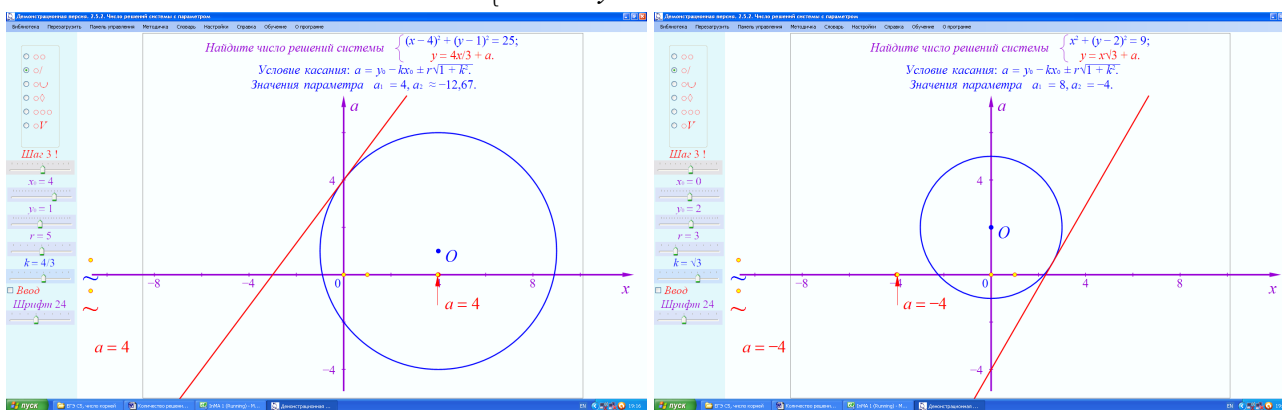
$$a = y_0 - kx_0 \pm r\sqrt{1+k^2}.$$

Исследование: Изменяя значение переменных и параметра, найдите число решений системы. Начать исследование желательно с простейшего случая $k=0$, когда прямые параллельны оси абсцисс. Затем рассмотрите случаи, когда корень извлекается (например, $k = \sqrt{3}$), уделите внимание популярному случаю $k=1$.

При малых и при больших значениях параметра решений нет. Поскольку прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек, число решений не более двух. При значениях параметра, соответствующих касанию, число решений равно единице, при промежуточных значениях параметра – двум.

Творческое задание. Известно, что данная система уравнений имеет не более одного решения. Найдите то значение параметра, при котором система уравнений имеет решение:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2; \\ y = x + a. \end{cases}$$



3. Найдите число решений системы $\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ y = ax + y_1. \end{cases}$

Решение: График первого уравнения – это окружность радиуса r с центром в точке $O(x_0; y_0)$. График второго уравнения – это семейство прямых, проходящих через точку $A(0; y_1)$. Тангенс угла наклона прямых (a) определяет значение параметра. При увеличении параметра возрастает угол между графиком и положительным направлением оси абсцисс.

Особые значения параметра – те значения, при которых изменяется число корней, то есть значения параметра, при которых прямые касаются окружности. Если точка $A(0; y_1)$ находится внутри окружности, то любая возможная прямая пересекает окружность в двух точках.

Условие касания находим, приравняв тангенсы угла наклона окружности и прямой. Решая полученное уравнение, находим координаты двух точек касания:

$$\frac{x_0 - x}{y - y_0} = a \Rightarrow a^2(y - y_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \pm \frac{ar}{\sqrt{1+a^2}}; \\ y = y_0 \mp \frac{r}{\sqrt{1+a^2}}. \end{cases}$$

Подставив полученные выражения в уравнение прямой, найдём значение параметра в особых точках. Если $x_0 = 0$, то особые значения параметра $a = \pm \sqrt{\frac{(y_1 - y_0)^2 - r^2}{r^2}}$.

Если $y_0 = y_1, |x_0| \neq r$, то особые значения параметра $a = \pm \sqrt{\frac{(y_1 - y_0)^2 - r^2}{r^2 - x_0^2}}$.

Если $x_0 = \pm r$, то окружность касается вертикальной прямой, проходящей через точку $A(0; y_1)$ и значение параметра $a = \frac{r^2 - (y_1 - y_0)^2}{2x_0(y_1 - y_0)}$. В остальных случаях

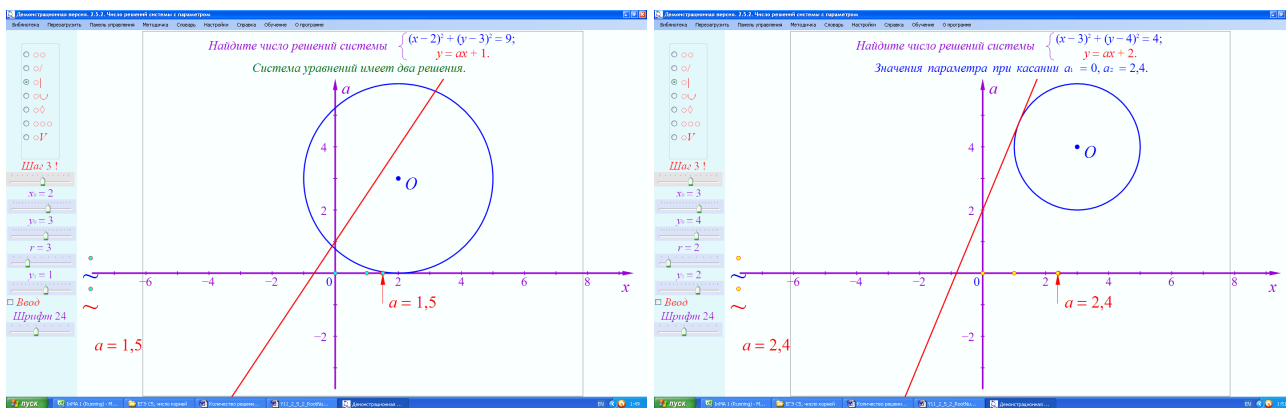
$$a = \frac{x_0(y_0 - y_1) \pm \sqrt{r^2(x_0^2 + (y_0 - y_1)^2 - r^2)}}{r^2 - x_0^2}.$$

Исследование: Изменяя значение переменных и параметра, найдите число решений системы. Начать исследование желательно с простейшего случая $y_0 = y_1, |x_0| < r$, когда точка $A(0; y_1)$ внутри окружности и число решений всегда равно двум. Рассмотрите случай $x_0 = r$, когда число решений легко найти ($x_0 = r = 2, y_0 = 3, y_1 = 2$). Затем рассмотрите случаи, когда корень хорошо извлекается (например, $x_0 = 3, y_0 = 4, r = 2, y_1 = 2$).

Поскольку прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек, число решений не более двух. При значениях параметра, соответствующих касанию, число решений равно единице, при остальных значениях параметра – нулю или двум.

Творческое задание. Известно, что система уравнений $\begin{cases} (x+3)^2 + (y-5)^2 = r^2; \\ y = ax + 1. \end{cases}$ при всех

значениях параметра, кроме одного, имеет два решения. Найдите то значение параметра, при котором система уравнений имеет единственное решение.



4. Задание. Найдите число решений системы $\begin{cases} (|x| - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ (x - x_1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$

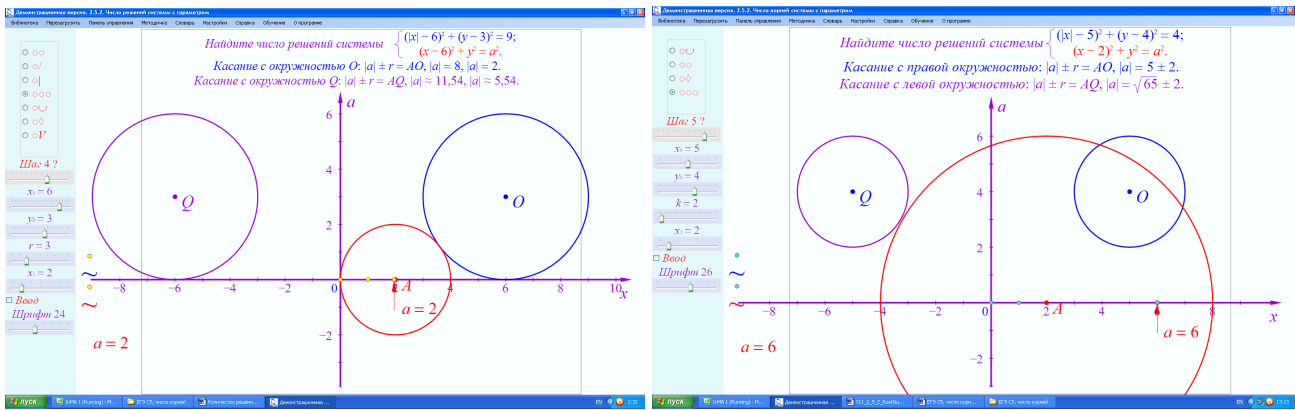
Решение: В ходе решения строим графики каждого из уравнений и исследуем число общих точек построенных графиков. График первого уравнения – это пара окружностей одинакового радиуса r . Центры окружностей O и Q имеют одинаковую ординату y_0 и одинаковые по модулю, но разные по знаку абсциссы $\pm x_0$. Графики показаны синим и фиолетовым цветом. График второго уравнения – это окружность радиуса $|a|$ с центром на оси абсцисс в точке $A(x_1; 0)$.

Особые значения параметра – те значения, при которых изменяется число корней, то есть значения параметра, при которых окружность второго графика касается окружностей первого.

Условия касания – сумма или разность радиусов окружностей равна межцентровому расстоянию: $|a| \pm r = AO, |a| \pm r = AQ$.

Исследование: Изменяя значение переменных и параметра, найдите число решений системы. Пользуйтесь целыми значениями для одного межцентрового расстояния (например,

$x_0 = 6, y_0 = 3, r = 3, x_1 = 2$). Типично, что при малых по модулю и больших значениях параметра решений нет. В точках касания число корней нечётное, в остальных точках число корней чётное.



Творческое задание. Известно, что система уравнений
$$\begin{cases} (|x| - 6)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ (x - x_1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$
 при

некотором значении параметра имеет ровно два решения. При этом значении параметра, графики касаются. Найдите это значение параметра.

5. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + |y - y_0| = r; \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2. \end{cases}$$

Решение: График первого уравнения состоит из пары парабол, которые стыкуются при $y = y_0$. Уравнения парабол $y = y_0 \pm (r - (x - x_0)^2)$. Они имеют горизонтальную ось симметрии $y = y_0$, вертикальную ось симметрии $x = x_0$. Центр симметрии точка (x_0, y_0) .

Второй график – это окружность радиусом $|a|$, центр которой расположен в центре симметрии парабол.

Число корней изменяется при таком значении параметра, при котором происходит касание окружности второго графика с вершинами парабол. В точке касания:

$$x = x_0, \quad y = y_0 \pm r = y_0 \pm a, \quad \text{значит,} \quad a = \pm r.$$

Число корней изменяется при таком значении параметра, при котором происходит внутреннее касание окружности второго графика с параболой. Чтобы найти это значение, переходим от системы уравнений к уравнению с одной переменной:

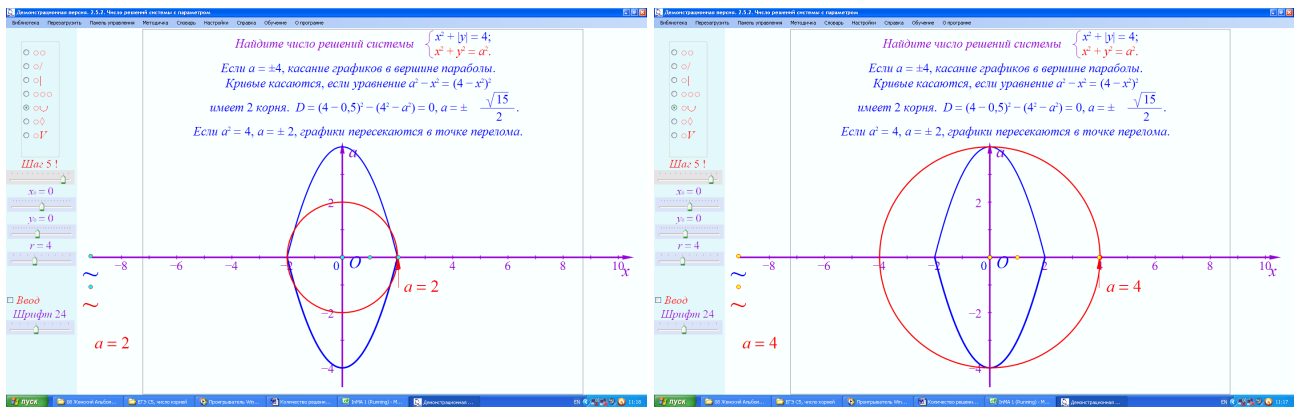
$$(y - y_0)^2 = a^2 - (x - x_0)^2 = (r - (x - x_0)^2)^2.$$

Это квадратное уравнение для $(x - x_0)^2$. Оно имеет один корень, если дискриминант равен нулю:

$$D = (r - 0,5)^2 - (r^2 - a^2) = 0, \quad a = \pm \sqrt{r - \frac{1}{4}}.$$

Число корней изменяется при таком значении параметра, при котором происходит пересечение окружности и параболы в точках излома первого графика, то есть при $y = y_0$.

Исследование: Изменяя значение переменных и параметра, найдите число решений системы. Пользуйтесь значениями $r = 1, 4$ и 9 . Обратите внимание на то, что параметры x_0 и y_0 не влияют на ответ задачи. При малых по модулю и больших значениях параметра решений нет.



6. Найдите число решений системы $\begin{cases} |x - x_0| + |y - y_0| = r; \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2. \end{cases}$

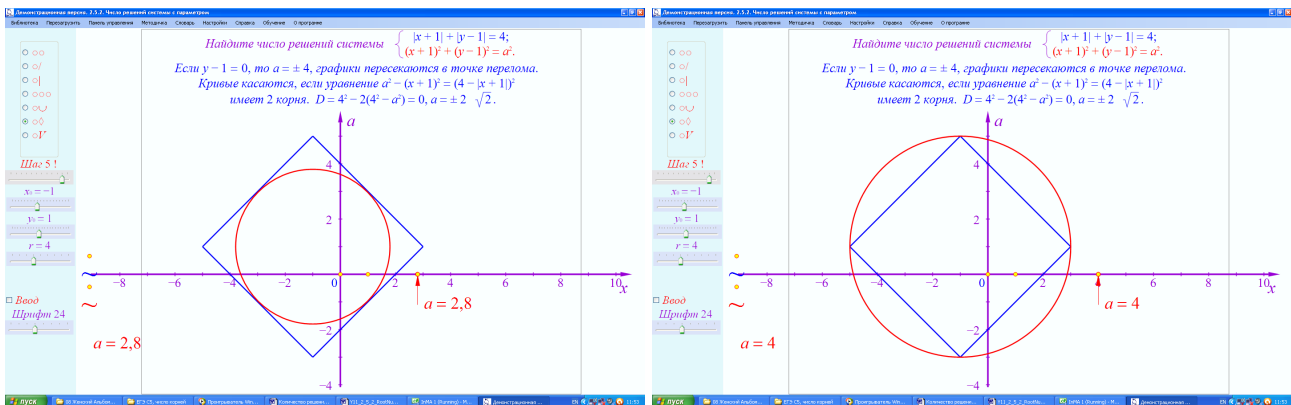
Решение: График первого уравнения – это квадрат, наклоненный под углом 45° к осям координат, длина половины диагонали которого равна r . Второй график – это окружность радиусом $|a|$, центр которой расположен в центре симметрии квадрата.

Число корней изменяется при том значении параметра, при котором окружность проходит через вершины квадрата. При этом $y = y_0$, $a = \pm r$.

Число корней изменяется при том значении параметра, при котором происходит внутреннее касание окружности со сторонами квадрата. Чтобы найти это значение, переходим от системы уравнений к уравнению с одной переменной:

$$(y - y_0)^2 = a^2 - (x - x_0)^2 = (r - |x - x_0|)^2$$

Это квадратное уравнение для $|x - x_0|$. Оно имеет один корень, если дискриминант равен нулю. При этом $a = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$. Радиус окружности в этом случае относится к радиусу в предыдущем случае, как $\sin 45^\circ : 1$.



7. Найдите число решений системы $\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2; \\ y = |x - a| + y_1. \end{cases}$

График первого уравнения – это окружность с центром $O(x_0; y_0)$. График второго уравнения состоит из двух лучей с общим началом – это «птичка, крылья вверх», вершина графика расположена в точке $A(a; y_1)$.

Число корней изменяется при том значении параметра, при которых «крыло» второго графика касается окружности или вершина графика лежит на этой окружности.

Тангенс угла наклона «правого крыла» к оси абсцисс равен 1, значит прямая, содержащая

это крыло, касается окружности в точках $(x_k; y_k)$, таких, что
$$\begin{cases} x_k = x_0 \pm \frac{r}{\sqrt{2}}, \\ y_k = y_0 \mp \frac{r}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad \text{Условие касания}$$

$$y_k = x_k - a + y_1 \Leftrightarrow a = x_k - y_k + y_1 = x_0 - y_0 + y_1 \pm r\sqrt{2}.$$

Поскольку «крыло» – это луч, идущий вверх, добавляется условие, что ордината вершины должна быть не больше, чем ордината точки касания, то есть

$$y_1 \leq y_k \Leftrightarrow y_0 \geq y_1 \pm \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

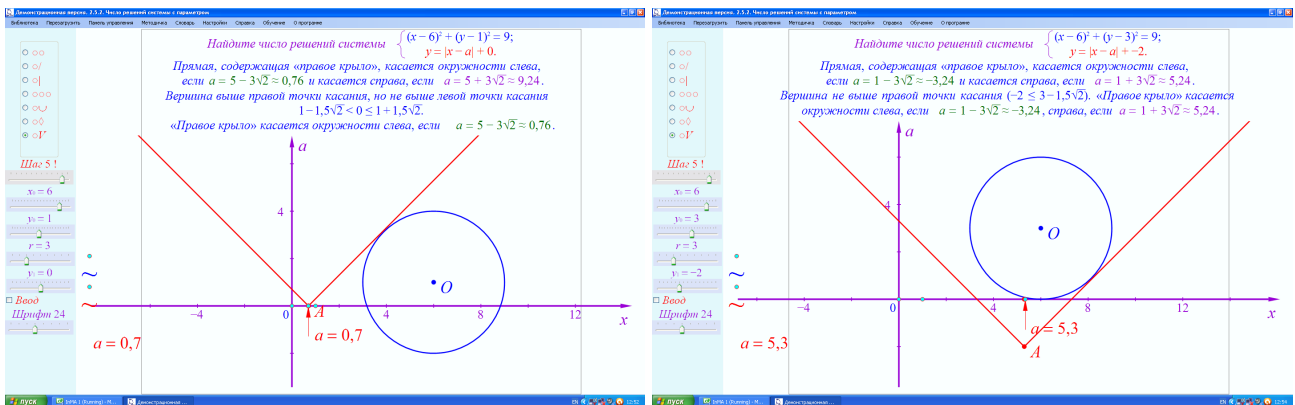
Аналогично записываем условия касания с «левым крылом».

Если вершина графика лежит на окружности, то её координаты удовлетворяют уравнению окружности: $(a - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2$.

Изменяя значение параметра, исследуйте число решений системы, то есть количество общих точек графиков. В особых точках число корней нечётное, в остальных точках число корней чётное.

Творческое задание. Известно, что система уравнений
$$\begin{cases} (|x| - 2)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \\ y = |x - a| + y_1, \end{cases} \quad \text{при}$$

некотором значении параметра имеет три решения. Найдите это значение параметра, если известно, что при этом ординаты двух решений совпадают.



8. Найдите число решений системы
$$\begin{cases} f(x, y) = 0; \\ g(x, y, a) = 0. \end{cases}$$

Задайте функции самостоятельно по образцу и исследуйте количество решений.

