Размышления по оформлению решений С5

Известны три важных утверждения, принятые в математическом анализе.

– если известна область значений параметра, то допустимо подразделить ***всю*** область допустимых значений параметра на часть, которая является ответом, и на часть, которая не является ответом, не объясняя, почему это сделано. Этот метод можно назвать «делёж пирога»;

– решение задачи считается полным и корректным, если для любого значения параметра в области ответа доказано, что выполнены ***все*** условия задания, а для любого значения параметра, которое не является ответом доказано, что хотя бы одно из условий хотя бы при одном значении переменной нарушено. Этот метод можно назвать «восхваление – охаивание»;

– запрещено использовать чертёж для доказательства какого-либо тезиса, но целесообразно использовать его при поиске решения.

Метод «дележ пирога» является традиционным для математического анализа. В этом методе каждая часть доказательства начинается со слова «пусть». Всякий, кто изучал основы анализа в институте, знает, что именно с этого слова начинается большинство теорем и задавать вопрос «А почему именно так?» в математике не принято. Принято тщательно проверять, что из этого «пусть» следует всё, написанное далее. Метод восходит к трудам великих математиков, например, Карла Гаусса, который писал, «Мои результаты мне уже давно известны. Я только не знаю, как я к ним приду».

Метод «восхваление – охаивание» представляется интуитивно очевидным. Его основы связаны с аксиомами полноты множества действительных чисел и достаточно не тривиальны. Простая часть метода, это «охаивание». Здесь наблюдается полная аналогия с известным методом «от противного». Достаточно найти ровно один контрпример, получить одно противоречие, чтобы отвергнуть утверждение. В отличие от этого, «восхваление» требует достаточно полного доказательства, что при выбранном диапазоне значений параметра все условия задания удовлетворены.

И, наконец, о рисунках. Загляните в любую книгу математиков высокого класса по математическому анализу. Там чертежей нет вообще. Примером являются классические «Лекции по математическому анализу» В.А. Садовникова. Почему так? Известны рисунки, которые «доказывают» равенство: $63 = 64 = 65$. Шахматная доска $8\times 8 = 64$ разрезана на треугольники и трапеции. Затем они перемещены и сложены в виде прямоугольника с размерами $5\times 13 = 65$ или в виде сложной фигуры из двух прямоугольников $5\times 6 = 30$ и перемычки между ними длиной 3. Известно также множество доказательств парадоксов типа «прямой угол равен тупому», связанных с тем, что пересечение каких-то линий происходит на рисунке не там, где пересекаются линии на точном чертеже. Поэтому в математическом анализе использование рисунков для доказательства не принято.

Решение заданий данного раздела предложено осуществлять по единой схеме, которая работает для всех известных заданий этого типа**.** Схема решения включает четыре стандартных этапа:

На первом осуществляется поиск ответа с помощью «черновика». При этом широко применяются графическая интерпретация уравнений или неравенств, замена неравенств уравнениями для поиска границ диапазона параметра, подстановка конкретных значений иксов. Но это именно черновик. Не строгий и не претендующий на то, что его увидит проверяющий. Этап завершается выяснением критических точек для оформления решения.

Оформление решения включает три последовательных шага:

– преобразование условий к виду, удобному для выполнения операции «восхваления» и «охаивания». Здесь важна точность эквивалентных переходов. Рекомендуется использовать знак эквивалентности и строго отслеживать, что никакие значения параметра не утеряны;

– вводя с помощью слова «пусть» диапазон значений параметра, являющихся ответом задания, или его частью, проверяем выполнение ***всех*** условий задания.

– вводя с помощью слова «пусть» диапазон значений параметра, не являющихся ответом задания, или его частью, находим ровно по ***одному противоречию*** с условием задания. После того, как это сделано, вытираем пот со лба и записываем: «В соответствии с проведенным анализом, ответ задания следующий:…»

Вполне разумно привести использованный Вами на стадии поиска решения рисунок, но его целесообразно сопроводить словами: «Решение задания иллюстрирует рисунок, на котором в координатах … изображено…». Другие ссылки на рисунок не желательны.

Задание типа С5 (МГУ, 2001, мехмат)

Решите уравнение $3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2|\sqrt{3x+18}-2|$.

Размышления:

Если обозначить $y=\sqrt{3x+18}, f(x)=3x-2|x-2|$, то получим уравнение $f(x)=f(y)$, которое для строго монотонной функции $f(x)$ имеет единственное решение $x=y$.

Метод решения:

Рассматриваем некоторую функцию $f(x)$, с помощью которой впоследствии преобразуем уравнение. Доказываем её строгую монотонность.

Записываем новую переменную $y=g(x)$, такую, что уравнение примет вид $f(x)=f(y)$. Делаем вывод, что $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Решаем уравнение $x=g(x)$.

Решение:

Область допустимых значений переменной $x\geq -6$.

Пусть $f(x)=3x-2|x-2|=\begin{cases} x+4, x\geq 2; \\ 5x-4, x<2. \end{cases}$ Это строго монотонная функция.

Пусть $y=\sqrt{3x+18}$. Тогда уравнение примет вид $f(x)=f(y)$. Для строго монотонной функции $f(x)$ такое уравнение имеет единственное решение:

$$x=y\Leftrightarrow x=\sqrt{3x+18}\geq 0\Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

Задание типа С5 (МГУ, 1999, мехмат)

Найти все a, при которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2+2(a^2+1)x-a^2+4a-6}{x^2+(a^2+5a-5)x-a^2+4a-6}<0$$

не меньше 1.

Размышления:

Свободный член в числителе и знаменателе всегда отрицателен, значит, и числитель, и знаменатель имеют по два корня. При больших отрицательных или больших положительных значениях аргумента левая часть близка к единице, поэтому искомая сумма длин интервалов ограничена.

Вычисление корней приводит к громоздким формулам, использование которых явно ведёт в тупик. Проверка для простых значений a (0 или 1) показывает, что пары корней числителя и знаменателя имеют разные знаки, причём корни чередуются следующим образом: $y_1<x_1<0<y_2<x_2$. Заметим, что в этом случае искомая сумма длин интервалов равна $(x_1+x_2)-(y_1+y_2)$. При этом суммы корней определяем, применяя теорему Виета.

Метод решения:

Доказываем, что число корней числителя два $x_1 < x_2$ и знаменателя тоже два $y_1 < y_2$ удовлетворяют соотношению $x_1x_2 = y_1y_2 < 0$.

Доказываем, что корни упорядочены следующим образом: $y_1 < x_1 < 0 < y_2 < x_2$.

Делаем вывод, что искомая сумма длин интервалов $L = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$.

Для поиска L применяем теорему Виета.

Решение:

Свободный член в числителе и знаменателе всегда отрицателен:

$$-a^2 + 4a - 6 = -2 - (a-2)^2 < 0.$$

Значит, и числитель, и знаменатель имеют ровно по два корня.

При больших отрицательных или больших положительных значениях аргумента левая часть положительна (близка к единице), поэтому искомая сумма длин интервалов ограничена.

Пусть корни числителя $x_1 \le x_2$, знаменателя $y_1 \le y_2$. Произведение корней – отрицательное число:

$$x_1x_2 = y_1y_2 = -a^2 + 4a - 6 < 0.$$

Значит, в каждой паре меньший корень отрицателен, больший – положителен:

$$x_1 < 0 < x_2,\ y_1 < 0 < y_2.$$

Заметим, что:

$$y_2 - x_2 = y_2 - \frac{y_1y_2}{x_1} = y_2 - \frac{y_1y_2}{x_1} = \frac{y_2}{-x_1}(y_1 - x_1)$$

Значит либо одновременно $x_1 \ge y_1$ и $x_2 \ge y_2$, либо $y_1 \ge x_1$ и $y_2 \ge x_2$.

Пусть $x_1 \ge y_1$. Тогда $x_2 \ge y_2$ и решения неравенства это промежутки $(y_1; x_1)$ и $(y_2; x_2)$. Их суммарная длина:

$L = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) = (y_1 + y_2) - (x_1 + x_2) = -(a^2 + 5a - 5) + (2a^2 + 2) = a^2 - 5a + 7 < 0$,

так как дискриминант последнего выражения отрицателен.

Если эта длина не меньше 1, то

$$a^2 - 5a + 7 \ge 1 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty).$$

Заметим, что если $x_1 \le y_1$, то $x_2 \le y_2$, решения неравенства это промежутки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ суммарная длина которых равна $(-L) < 0$ – противоречие.

Ответ: $a \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Интерактивный рисунок:

На рисунке можно показать неравенство вида:

$$\frac{x^2 + (2a^2 + k_3)x - (a + k_1)^2 - k_2}{x^2 + (a^2 + (k_5 + k_6)a + (k_5k_6 + k_4 - k_3)x - (a + k_1)^2 - k_2} < 0.$$

Можно показать графики числителя и знаменателя при различных значениях параметра и убедиться, что действительно корни чередуются указанным образом. Варьирование параметров k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 позволяет создать ряд однотипных задач.

Задание типа С5 (Математика в школе,2008,9,с.34)

Найти области значений функции $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ и так далее, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+8}{x-4}, x < 4 \\ \sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-3}} + \sqrt{\dfrac{9x-35}{x-2}}, x \ge 4. \end{cases}$$

Размышления:

Первая функция в паре симметричная: $y = f(x) = 4 + \dfrac{24}{x-4} \Leftrightarrow (x-4)(y-4) = 24$

В этом случае $f(f(x)) = x$, причём если аргумент меньше, чем 4, то и функция меньше, чем 4.

Значения второй функции не превосходят 4, значит, если $z = f(x) < 4$, то $f(f(z)) = z$ и области значений всех функций $(-\infty; 4)$.

Каждое слагаемое функции $g(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-3}}+\sqrt{\dfrac{9x-35}{x-2}}$ легко оценить при $x\ge 4$ и показать, что $g(x)<4$.

Метод решения:

Доказываем, что функция $g(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-3}}+\sqrt{\dfrac{9x-35}{x-2}}<4$, так как первое слагаемое меньше, чем 1, а второе – меньше, чем 3.

Доказываем, что $E(f)=(-\infty;\,4)$, так как все значения функции меньше, чем 4 и для любого значения функции из этого диапазона можно найти соответствующее значение аргумента, по крайней мере, для $x<4$.

Доказываем, что если $D(f)=(-\infty;\,4)$, то $f(f(x))=x$.

Делаем вывод, что для каждой из исследуемых функций $D(f)=(-\infty;\,4)$.

Важно, что на первом шаге $f(f(x))\ne x$ при $x\ge 4$. Например, $f(5)=\sqrt{10/3}$; $f(f(5)\ne 5$.

Решение:

Если $x>3$, то из $x-5<x-3$ следует $\dfrac{x-5}{x-3}<1$; $\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-3}}<1$.

Если $x>35/9$, то из $9x-35<9x-18$ следует $\dfrac{9x-35}{x-2}<9$; $\sqrt{\dfrac{9x-35}{x-2}}<3$.

Значит, при $x\ge 4$ $g(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-3}}+\sqrt{\dfrac{9x-35}{x-2}}<1+3=4$.

Пусть $y=h(x)=\dfrac{4x+8}{x-4}=4+\dfrac{24}{x-4}\Leftrightarrow (x-4)(y-4)=24$.

Если $x<4$, то и $y<4$. Для любого $y<4$ можно найти x такой, что $h(x)=y$, значит, $E(f)=(-\infty;\,4)$.

Если $x<4$, то $h(h(x))=h(y)=4+\dfrac{24}{y-4}=4+\dfrac{24}{24/(x-4)}=4+(x-4)=x$.

В этом случае $f(f(x))=x$, причём если аргумент меньше, чем 4, то и функция меньше, чем 4.

Для любого значения $z=f(f(x))<4$ можно найти $f(x)$ такое, что $f(f(x))=z$, значит, $E(f(f))=(-\infty;\,4)$. Аналогично найдём $E(f(f(f)))=(-\infty;\,4)$ и так далее.

Ответ: $E(f(f(f)))=E(f(f))=E(f)=(-\infty;\,4)$.

Интерактивный рисунок:

На рисунке можно показать функцию рассматриваемого вида и исследовать при произвольном x переходы $x\to f(x)\to f(f(x))\to f(f(f(x)))$.

Задание типа С5 (Математика в школе,2008,9,с.25)

Функция $y=f(x)$ задана равенством

$$f(x)=\begin{cases}4\cdot 5^{x+7}-8, x\le -6\\ -\dfrac{8x+53}{x+7}, x>-6.\end{cases}$$

Найдите все целые числа, которые являются корнями уравнения $f(f(x))=x$.

Размышления:

Строим график по точкам от $x=-6$:

Если $x=-6$, то $f(x)=12$.

Если $x=-7$, то $f(x)=-4$.

Если $x=-8$, то $f(x)=-7{,}2$.

Если $x=-9$, то $f(x)$ чуть больше, чем -8 и монотонно убывает при уменьшении икса, причём $f(x)>-8$.

Если $x = –5$, то $f(x) = -\dfrac{8x+53}{x+7} = -8 + \dfrac{3}{x+7}$, $f(x) = –6{,}5$.

Если $x = –4$, то $f(x) = –7$.

Если $x = –3$, то $f(x) = –7{,}25$ и монотонно убывает с ростом икса, причём $f(x) > –8$.

Значит, при $x > –4$ и $x < –7$ целочисленных значений функция не принимает, причём $E(f) = (–8;\ 12]$.

Метод решения:

Находим $E(f) = (–8;\ 12]$ и делаем вывод, что решение уравнения $f(f(x)) = x$ принадлежит промежутку $x \in (–8;\ 12]$, то есть множеству $\{–7; –6; \ldots, 12\}$..

Доказываем, что при $x > –4$ $f(f(x)) < –4$ и решений нет.

Проверяем остальные числа $\{–7; –6; –5; –4\}$.

Решение:

Показательная функция $g(x) = 4 \cdot 5^{x+7} – 8 > – 8$ строго монотонно возрастающая, непрерывная, при больших по модулю отрицательных иксах сколь угодно близка к $– 8$, $g(– 6) = 12$, значит, на промежутке $x \in (–\infty; – 6]$ $E(g) = (–8;\ 12]$.

Дробно-линейная функция $h(x) = -\dfrac{8x+53}{x+7} = -8 + \dfrac{3}{x+7}$ на промежутке $x \in (–6; +\infty)$ строго монотонно убывающая, непрерывная, при больших положительных иксах сколь угодно близка к $– 8$, $h(– 6) = 5$, значит на промежутке $x \in (–6; +\infty)$ $E(h) = (–8;\ 5)$.

$h(– 4) = – 7$, значит на промежутке $x \in (–4; +\infty)$ $E(h) = (–8;\ – 7)$.

Следовательно, $E(f) = (–8;\ 12]$. Поскольку $f(–8) = –7{,}2$; $f(12) = -7\dfrac{16}{19}$, $x = 6$ принадлежит $E(f)$, то $E(f(f)) = \left(-7\dfrac{16}{19}, 12\right]$. Целые корни уравнения $f(f(x)) = x$ принадлежат множеству $\{–7; –6; \ldots, 12\}$.

Заметим, что $f(–7) = – 4$; $f(–4) = –7$. Отсюда числа $(–7)$ и $(–4)$ являются корнями уравнения $f(f(x)) = x$.

Пусть $x > –4$. Тогда $f(x) = h(x)$, $E(f) = E(h) = (–8;\ – 7)$,

$$f(f(x)) < f(– 7) < –4, \quad f(f(x)) < – 4 < x.$$

Пусть $x = –5$. Тогда $f(x) = (–6{,}5)$, $f(f(x)) = 4\sqrt{5} - 8$. Это иррациональное (нецелое) число.

Пусть $x = –6$. Тогда $f(x) = 12$, $f(f(x)) = h(12) = -7\dfrac{16}{19}$.

Ответ: $\{–7; –4\}$.

Интерактивный рисунок:

На рисунке можно показать функцию рассматриваемого вида и исследовать при произвольном x переходы $x \to f(x) \to f(f(x))$.

Задание типа С5 (?)

Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $f(g(x)) + g(f(x) + g(x)) = 33$, если заданы функции $f(x) = x^4 – 4x^3 + 5x^2 – 2x + 4{,}5$ и

$$g(x) = \begin{cases} \log_3(1 + 0{,}5x^2) + \dfrac{16 - 2x}{12 - 3x}, x < 4, \\ 16{,}5 \text{ при } x \geq 4. \end{cases}$$

Размышления:

Для упрощения $f(x)$ можно заметить, что два первых слагаемых – это члены разложения $(x – 1)^4$, а можно выполнить последовательно группировку:

$$f(x) = x^4 – 4x^3 + 4x^2 + x^2 – 2x + 1 + 3{,}5 = (x^2 – 2x)^2 + (x – 1)^2 + 3{,}5 =$$
$$= ((x – 1)^2 – 1)^2 + (x – 1)^2 + 3{,}5 = (x – 1)^4 – (x – 1)^2 + 4{,}5 = ((x – 1)^2 – 0{,}5)^2 + 4{,}25 \geq 4{,}25.$$

Строим график $g(x)$ по «хорошим» точкам:

$g(0) = 4/3$; $g(2) = g(–4) = 3$; $g(–2) = 19/9$; $g(3) = \log_3 5{,}5 + 10/3 > 1 + 3 = 4$.

Заметим, что функция $g(x) > 0$, так как первое слагаемое неотрицательное, а второе больше, чем 2/3 (при $x < 4$).

Этого достаточно, чтобы понять, что $f(x) + g(x) > 4$ и $g(f(x) + g(x)) = 16{,}5$. Значит, исходное уравнение $f(g(x)) + g(f(x) + g(x)) = 33 \Leftrightarrow f(g(x)) = 16{,}5$.

Значит, $((g(x) - 1)^2 - 0{,}5)^2 + 4{,}25 = 16{,}5 \Leftrightarrow (g(x) - 1)^2 - 0{,}5 = \pm 3{,}5$.

Отсюда $g(x) - 1 = \pm 4$ и $g(x) = 3$.

Два корня этого уравнения известны (2 и –4). Остаётся аккуратно обосновать отсутствие других корней. Поиск минимума с помощью производной сложен, так как возникает уравнение с логарифмом. Проще доказать, что функция монотонно убывает при малых иксах, например, при $x < -1$, монотонно возрастает при больших иксах, например, при $x > 0$ и достаточно мала в промежутке ($g(x) < 3$ при $x \in (-1; 0)$).

Решение:

$$((x - 1)^2 - 0{,}5)^2 + 4{,}25 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x^2 - 2x + 4{,}5 = f(x),$$

значит $f(x) \geq 4{,}25$.

Заметим также, что решения уравнения $f(x) = 16{,}5$ – это числа $x = 3$ и $x = -1$, так как:

$$((x - 1)^2 - 0{,}5)^2 = 12{,}25 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 0{,}5 = 3{,}5\ (-3{,}5 < -0{,}5) \Leftrightarrow x - 1 = \pm 2.$$

Исследуем функцию $g(x)$. Если $x \in (0; 4)$, то функция непрерывная и строго монотонно неограниченно возрастает, так как возрастает каждое слагаемое.

$$g(0) = 4/3;\ g(2) = 3;\ g(3) = \log_3 5{,}5 + 10/3 > 1 + 3 = 4.$$

Пусть $x \in (-2; 0)$. Докажем, что $g(x) < 3$. Для этого найдём знак разности

$$3 - g(x) = \left(2 - \log_3 \frac{2 + x^2}{2}\right) - \left(\frac{16 - 2x}{12 - 3x} - 1\right) = \log_3 \frac{18}{2 + x^2} - \frac{4 + x}{3 \cdot (4 - x)} > \log_3 \frac{18}{2 + 2^2} - \frac{4 + 0}{3 \cdot (4 - 0)} = \frac{2}{3}$$

Докажем, что $g(x) > 0$: $g(x) = \log_3(1 + 0{,}5x^2) + \dfrac{16 - 2x}{12 - 3x} \geq 0 + \dfrac{2}{3} > 0$

Пусть $x \in (-\infty; -2]$. $g(-4) = 3$. Докажем, что функция строго монотонно убывает.

$$g`(x) = \frac{x}{\ln 3} + \frac{8}{3(4 - x)^2} < -\frac{2}{\ln 3} + \frac{8}{3 \cdot 4^2} < -1 + \frac{1}{6} < 0.$$

Пользуясь найденными свойствами функций, последовательно получаем:

$f(x) + g(x) > 4$, значит, $g(f(x) + g(x)) = 16{,}5$, значит, исходное уравнение

$$f(g(x)) + g(f(x) + g(x)) = 33 \Leftrightarrow f(g(x)) = 16{,}5.$$

Решение уравнения $g(x) = 3$ или $g(x) = -1$.

Если $g(x) = 3$, то для $x \in (-\infty; -2]$ у строго монотонной функции имеется единственный корень $x = -4$, если $x \in (-2; 0)$, то корней нет ($g(x) < 3$), если $x \in (0; 4)$ у строго монотонной функции имеется единственный корень $x = 2$, для $x \in [4; +\infty)$ корней нет.

Если $g(x) = -1$, то корней нет, так как если $x \in (-2; 0)$, то корней нет ($g(x) > 0$), для больших x функция возрастает (корней нет), при меньших функция убывает (корней нет).

Ответ: $\{-4; 2\}$.

Задание типа С5 (?)

Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $f(h(x)) + g(h(x)) = 80$, если заданы функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 5$, $g(x) = x^3 + x^2 + 6x - 9$ и

$$h(x) = \begin{cases} x - 24{,}2 + 7(\sqrt{x} + \sqrt{x + 0{,}64}) + \sqrt{x^2 + 0{,}64x}, x \geq 0, \\ 2x^2 - x - 7, x < 0. \end{cases}$$

Размышления:

Упростим вид функции $h(x)$. Поскольку $x^2 + 0{,}64x = x(x + 0{,}64)$, значит,

$$\sqrt{x^2 + 0{,}64x} + 7\sqrt{x} + 7\sqrt{x + 0{,}64} + 49 = (7 + \sqrt{x})(7 + \sqrt{x + 0{,}64})$$

$$h(x) = \begin{cases} x - 73{,}2 + (7 + \sqrt{x})(7 + \sqrt{x + 0{,}64}), x \ge 0, \\ 2x^2 - x - 7, x < 0. \end{cases}$$

Упростим вид уравнения. Обозначим

$$p(x) = f(x) + g(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 5 + x^3 + x^2 + 6x - 9 = 2x^3 - x^2 + 13x - 4.$$

Тогда $f(h(x)) + g(h(x)) = p(h(x)) = 80$.

Если $p(x) = 80$, то $2x^3 - x^2 + 13x - 84 = 0$, $(x - 3)(2x^2 + 5x + 28) = 0$, $x = 3$.

Значит, $f(h(x)) + g(h(x)) = 80 \Leftrightarrow h(x) = 3$.

Корни уравнения $2x^2 - x - 7 = 3$, это $x = 2{,}5 > 0$ и $x = -2 < 0$. Второй корень удовлетворяет условию.

Корень уравнения $x - 73{,}2 + (7 + \sqrt{x})(7 + \sqrt{x + 0{,}64}) = 3 \Leftrightarrow (7 + \sqrt{x})(7 + \sqrt{x + 0{,}64}) + x = 76{,}2$ единственный, так как функция строго монотонно возрастающая. При $x = 0$ левая часть 49, при $x = 2$ она близка к 75. Ищем число x несколько большее, чем 2 такое, что из него извлекается корень и из $x + 0{,}64$ тоже. $1.5^2 = 2{,}25$; $2{,}25 + 0{,}64 = 2{,}89 = 1{,}7^2$ подходит. Итак, $x = 2{,}25$.

Решение:

Обозначим $p(x) = f(x) + g(x)$. Тогда

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 5 + x^3 + x^2 + 6x - 9 = 2x^3 - x^2 + 13x - 4.$$

Уравнение $f(h(x)) + g(h(x)) = 80$ преобразовывается к виду $p(h(x)) = 80$.

Если $p(h) = 80$, то $2h^3 - h^2 + 13h - 84 = 0$, $(h - 3)(2h^2 + 5h + 28) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 3$.

Решим уравнение $h(x) = 3$ при $x < 0$. $h(x) = 2x^2 - x - 7 = 3 \Leftrightarrow (2x - 5)(x + 2) = 0$, $x = -2 < 0$.

Решим уравнение $h(x) = 3$ при $x \ge 0$.

$$h(x) = x - 24{,}2 + 7(\sqrt{x} + \sqrt{x + 0{,}64}) + \sqrt{x^2 + 0{,}64x} = 3 \Leftrightarrow (7 + \sqrt{x})(7 + \sqrt{x + 0{,}64}) + x = 76{,}2$$

Корень этого уравнения единственный, так как функция строго монотонно возрастающая. Подбором найдём $x = 2{,}25$.

Ответ: 0,25 (корни $\{-2; 2{,}25\}$).

Задание типа С5 (?)

Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $g(x) = -13$, если известно, что $f(g(x)) = 4^x + x^4 - 40(2^x + x^2) + 396 + 2^{x + 1 + 2\log_2 x}$, $f'(x) = 2(x + 1)$ и $f(-1) = -4$.

Решение:

Ищем функцию $f(x)$. Если $f'(x) = 2(x + 1)$, то $f(x) = x^2 + 2x + c$.

Если $f(-1) = -4$, то $(-1)^2 + 2(-1) + c = -4$, значит, $c = -3$.

Следовательно, $f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$.

Исследуем выражение $f(g(x)) = 4^x + x^4 - 40(2^x + x^2) + 396 + 2^{x + 1 + 2\log_2 x}$. Оно определено только при положительных иксах. При этом:

$$f(g(x)) = 4^x + x^4 - 40(2^x + x^2) + 396 + 2x^2 \cdot 2^x = (2^x + x^2)^2 - 40(2^x + x^2) + 396;$$

$f(g(x)) = (2^x + x^2 - 20)^2 - 4$. Значит, $g(x) = 2^x + x^2 - 21$, $x > 0$

Функция $g(x)$ строго монотонно возрастающая и решение уравнения

$g(x) = -13 \Leftrightarrow 2^x + x^2 = 8$ находим подбором: $x = 2$.

Ответ: 2 (единственный корень).