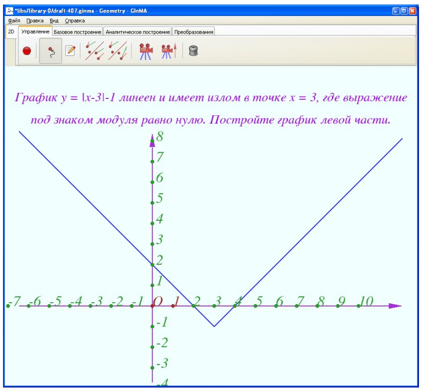
Примеры решения заданий типа С5 для ЕГЭ 2011

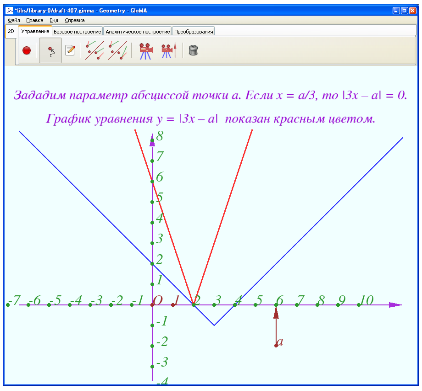
Задачи с модулями

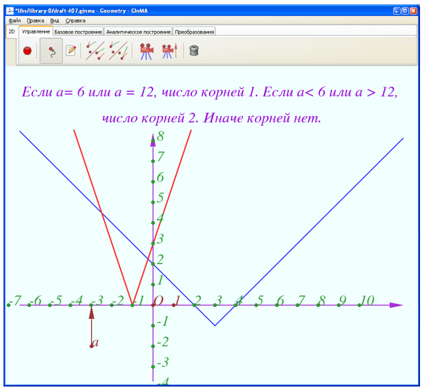
1. Линейная комбинация модулей

Задание. Найдите число корней уравнения $|3x - a| = |x - 3| - 1$ в зависимости от параметра a.

Решение: Пусть графики корректно построены и определены критические значения параметра, то есть те значения, при которых изменяется число корней системы. Предполагаем, что в этом случае определение числа корней при конкретном значении параметра тривиально. Задача сводится к построению графиков и поиску критических значений параметра.
Строим график правой части уравнения. Он линеен и имеет изломы в точках, где выражение под знаком модуля равно нулю. График уравнения $y = |x - 3| - 1$ показан синим цветом.
Чтобы построить график левой части, необходимо задать конкретное значение параметра. Например, зададим параметр абсциссой точки a. Если $x = a/3$, то $|3x - a| = 0$. График уравнения $y = |3x - a|$ показан красным цветом.
Корни уравнения - это общие точки синего и красного графиков. Перемещая точку a, исследуйте число корней в зависимости от параметра.
Заметим, что если $a = 6$ или $a = 12$, уравнение имеет один корень.
Если $a < 6$ или $a > 12$, уравнение имеет два корня.
В остальных случаях корней нет.
Можно изменять текст выражения и графики. Чтобы изменить график, с помощью панели ***Свойства*** выделите график и измените ***Выражение***.







2. Уравнения с группой модулей

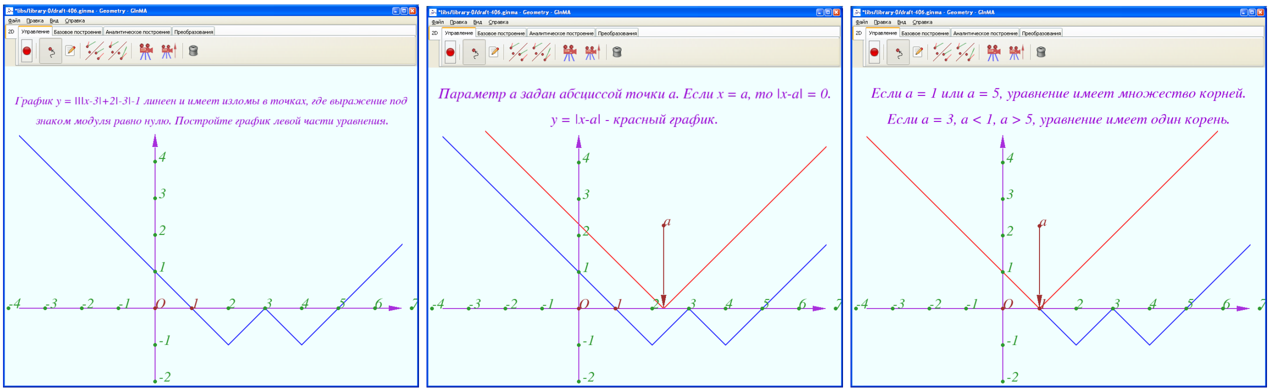
Задание. Найдите число корней уравнения $|x - a| = |||x - 3| + 2| - 3| - 1$ в зависимости от параметра a.

Решение: Пусть графики корректно построены и определены критические значения параметра, то есть те значения, при которых изменяется число корней системы. Предполагаем, что в этом случае определение числа корней при конкретном значении параметра тривиально. Задача сводится к построению графиков и поиску критических значений параметра.
Строим график правой части уравнения. Он линеен и имеет изломы в точках, где выражение под знаком модуля равно нулю. График уравнения $y = |||x - 3| + 2| - 3| - 1$ показан синим цветом.

Чтобы построить график левой части, необходимо задать конкретное значение параметра. Например, зададим параметр абсциссой точки a. Если $x = a$, то $|x - a| = 0$. График уравнения $y = |x - a|$ показан красным цветом.

Корни уравнения - это общие точки синего и красного графиков. Перемещая точку a, исследуйте число корней в зависимости от параметра.

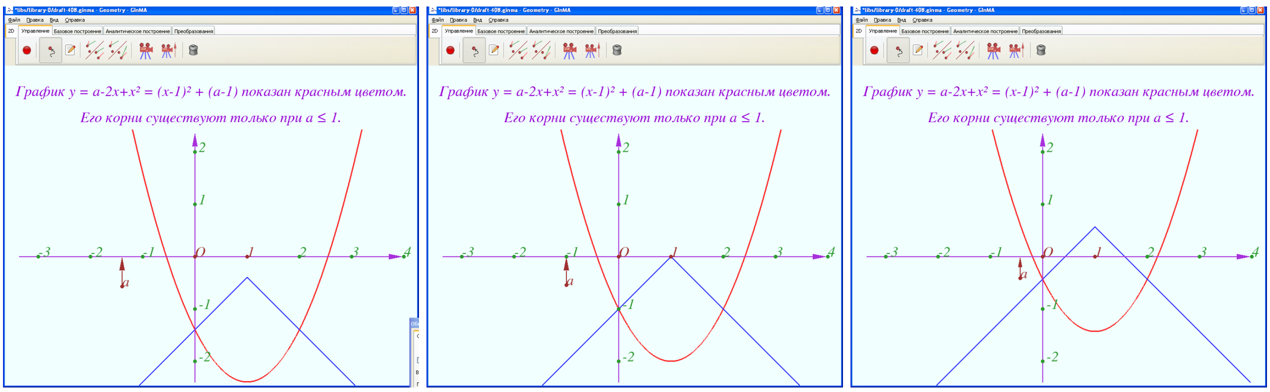
Заметим, что если $\boldsymbol{a} = 1$ или $\boldsymbol{a} = 5$, уравнение имеет множество корней.
Если $\boldsymbol{a} = 3$, $\boldsymbol{a} < 1$, $\boldsymbol{a} > 5$, уравнение имеет один корень.
В остальных случаях корней нет.
Можно изменять текст выражения и графики. Чтобы изменить график, с помощью панели ***Свойства*** выделите график и измените ***Выражение***.

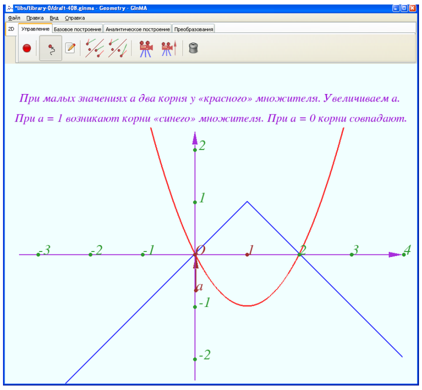


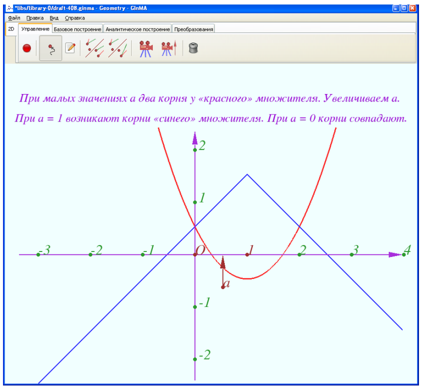
3. Произведение квадрата и модуля

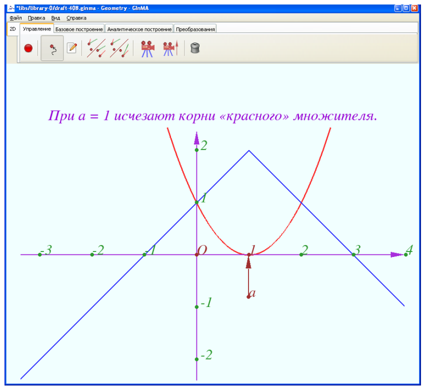
Задание. Найдите число корней уравнения $(\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2)(1 + \boldsymbol{a} - |\boldsymbol{x} - 1|) = 0$ в зависимости от параметра $\boldsymbol{a}$.

Решение: Пусть графики корректно построены и определены критические значения параметра, то есть те значения, при которых изменяется число корней системы. Предполагаем, что в этом случае определение числа корней при конкретном значении параметра тривиально. Задача сводится к построению графиков и поиску критических значений параметра.
Строим график второго множителя. Он кусочно-линеен и имеет излом в точке $\boldsymbol{x = 1}$, где выражение под знаком модуля равно нулю. Зададим параметр как абсциссу точки $\boldsymbol{a}$. Функция $\boldsymbol{y} = 1 + \boldsymbol{a} - |\boldsymbol{x} - 1|)$ - кусочно-линейная. Если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$, то $\boldsymbol{y} = 1 + \boldsymbol{a}$. Корни $(\boldsymbol{a} + 2)$ и $(-\boldsymbol{a})$ существуют при $\boldsymbol{a} \geq -1$. График уравнения $\boldsymbol{y} = 1 + \boldsymbol{a} - |\boldsymbol{x} - 1|)$ показан синим цветом.
График $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2 = (\boldsymbol{x} - 1)^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{1})$ показан красным цветом. Его корни существуют только при $\boldsymbol{a} \leq 1$.
Начнём исследование с малых значений параметра $\boldsymbol{a}$. При малых значениях $\boldsymbol{a}$ имеем два корня у «красного» множителя, у «синего» нет корней. Увеличиваем $\boldsymbol{a}$. При $\boldsymbol{a} = -1$ возникают корни у «синего» множителя. Число корней 3 при $\boldsymbol{a} = -1$ и четыре при больших $\boldsymbol{a}$. При $\boldsymbol{a} = 0$ корни множителей совпадают и общее число корней равно 2. Далее вновь четыре корня до точки $\boldsymbol{a} = 1$, где исчезают корни «красного» множителя. Число корней 3 при $\boldsymbol{a} = 1$ и два при больших $\boldsymbol{a}$.









4. Окружность и парабола

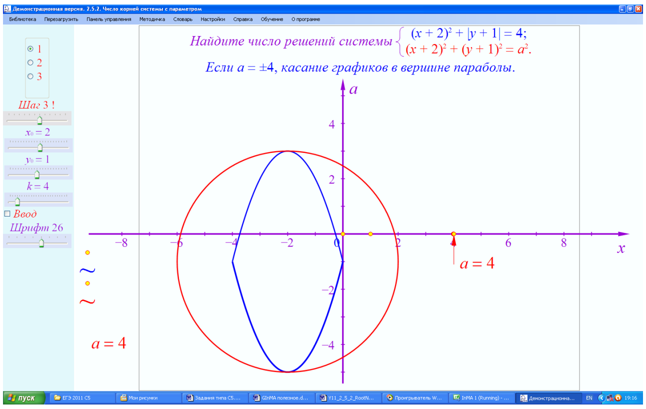
Задание. Найдите число решений системы $\begin{cases} (x+k_1)^2+|y+k_2|=k_3; \\ (x+k_1)^2+(y+k_2)^2=a^2. \end{cases}$

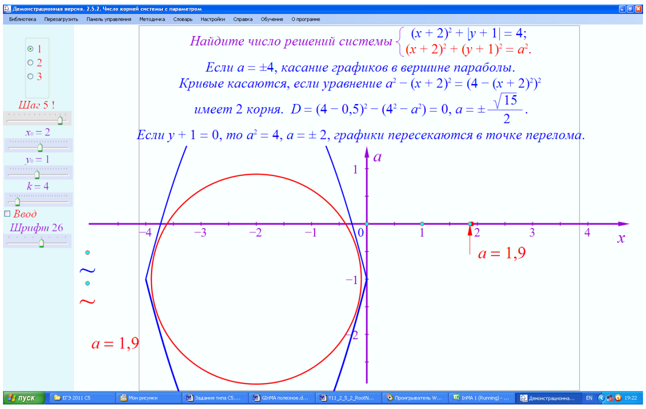
В ходе решения строим графики каждого из уравнений и исследуем число общих точек построенных графиков. Первый график состоит из пары парабол, которые стыкуются при $y+k_2=0$. Второй график – окружность, центр которой на оси симметрии парабол. Особые точки, в которых изменяется число корней:

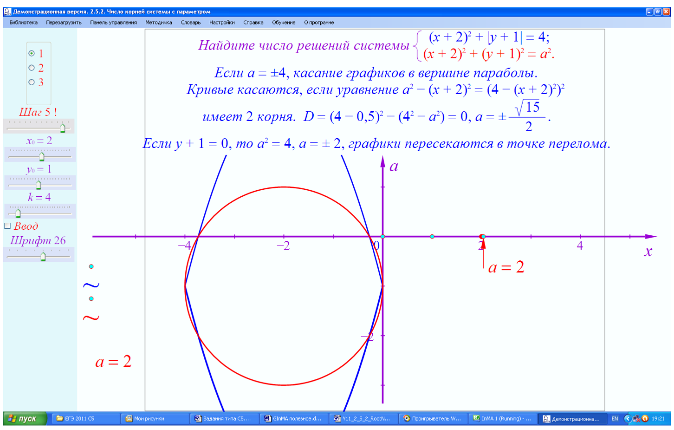
– значение параметра, при котором происходит касание окружности второго графика с вершинами парабол;

– значение параметра, при котором происходит внутреннее касание окружности второго графика с параболами. Чтобы найти это значение, переходим от системы уравнений к уравнению с одной переменной $(y+k_2)^2=a^2-(x+k_1)^2=(k_3-(x+k_1)^2)^2$. Это квадратное уравнение для $(x+k_1)^2$. Оно имеет один корень, если дискриминант равен нулю;

– значение параметра, при котором происходит пересечение окружности и параболы в точках излома первого графика, то есть при $y+k_2=0$.







5. Окружность и окружность (или её часть)

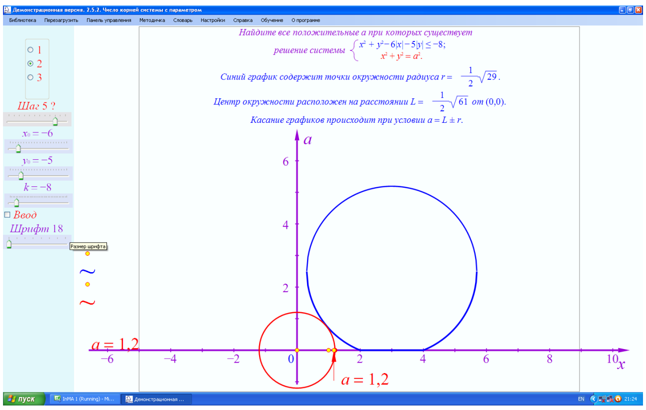
Задание. Найдите все положительные ***a***, при которых существует решение системы

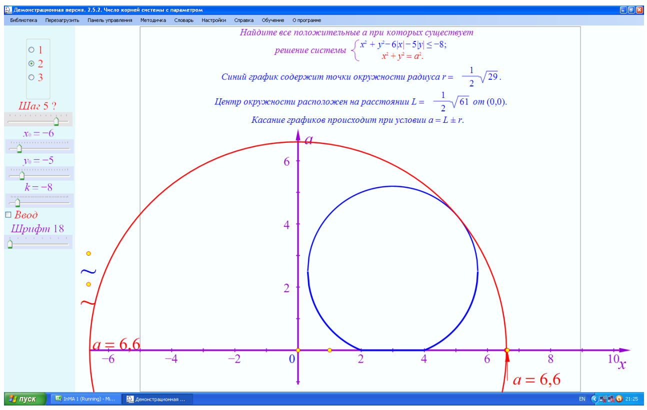
$$\begin{cases} x^2+y^2+k_1|x|+k_2+\dfrac{k_1^2+k_2^2}{4}\le k_3; \\ x^2+y^2=a^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(|x|+\dfrac{k_1}{2}\right)^2+\left(|y|+\dfrac{k_2}{2}\right)^2\le k_3; \\ x^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

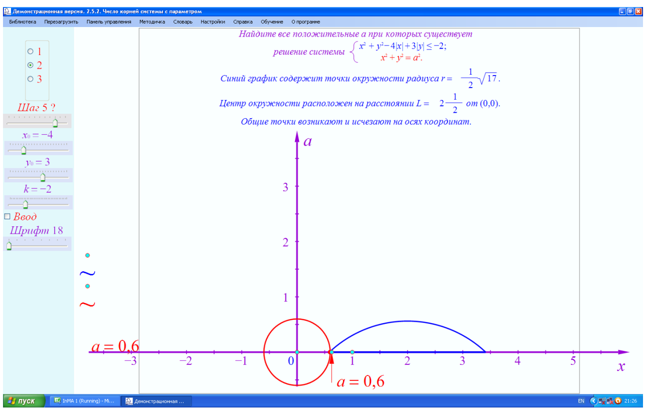
Решение выполняется только в первой четверти, так как в силу симметрии каждое решение в этой четверти преобразуется в четвёрку решений в других четвертях, отличающихся знаками. И наоборот, наличие решения в любой четверти приводит к наличию решения в первой четверти.
В ходе решения строим графики неравенства и уравнения. График первого уравнения состоит из точек окружности и, возможно, точек осей координат. График неравенства включает все внутренние точки графика уравнения.

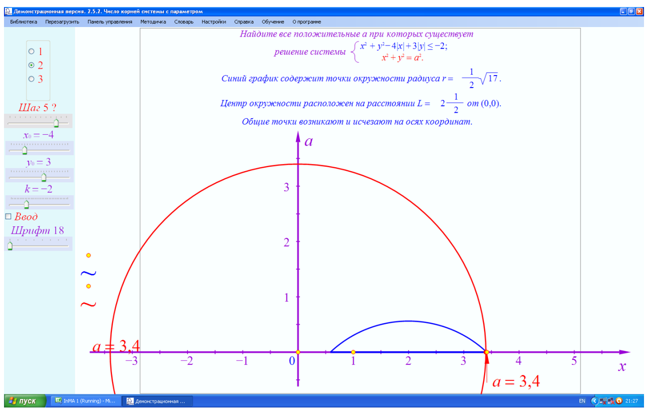
Особые точки, в которых изменяется число корней:
− если центр окружности первого графика расположен в первой четверти, то критические значения параметра - это те, при которых происходит касание окружностей графиков;
− если центр окружности первого графика не расположен в первой четверти, то критические значения параметра - это те, при которых происходит касание или пересечение окружностей графиков на осях координат.

На верхних двух рисунках происходит касание окружностей в критических точках.
На рисунках ниже показаны критические точки на оси абсцисс.









6. Окружность и квадрат

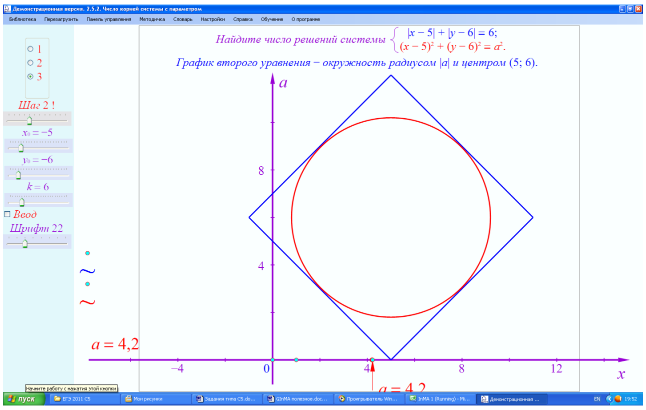
Задание. Найдите число решений системы $\begin{cases} |x+k_1|+|y+k_2|=k_3; \\ (x+k_1)^2+(y+k_2)^2=a^2. \end{cases}$

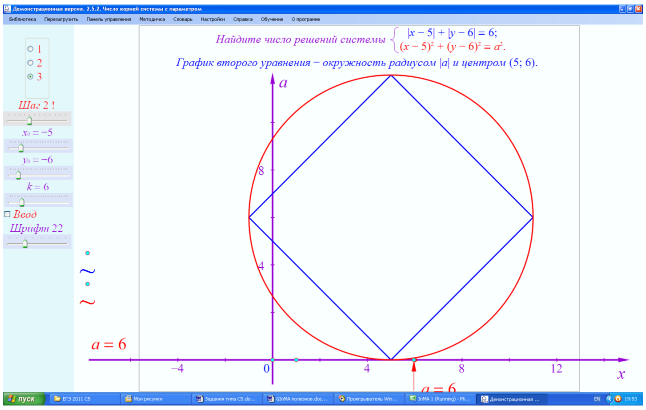
В ходе решения строим графики каждого из уравнений и исследуем число общих точек построенных графиков. График первого уравнения – это квадрат, наклоненный под углом 45° к осям координат.

Особые точки, в которых изменяется число корней:

– значение параметра, при котором окружность второго графика проходит через вершины квадрата. При этом $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k}_2=0$, $\boldsymbol{a}=\pm\boldsymbol{k}_3$;

– значение параметра, при котором происходит внутреннее касание окружности второго графика со сторонами квадрата. Чтобы найти это значение, переходим от системы уравнений к уравнению с одной переменной $(y+k_2)^2=a^2-(x+k_1)^2=(k_3-|x+k_1|)^2$. Это квадратное уравнение для $|x+k_1|$. Оно имеет один корень, если дискриминант равен нулю. При этом $a=\pm\dfrac{k_3}{\sqrt{2}}$. Радиус в этом случае относится к радиусу в предыдущем случае, как $\sin 45^\circ:1$.





7. Неявный корень

Задание. Найдите все значения ***a***, при каждом из которых корни уравнения $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$ существуют и принадлежат отрезку $x\in[2;17]$.

Решение: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a \Leftrightarrow$

$\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=a \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=a$.

Пусть $t=\sqrt{x-1}$. Тогда $t\in[1;4]$, $|t-2|+.|t-3|=a$. Функция в левой части на промежутке $t\in[1;4]$ это «корыто», значения её $a\in[1;2]$.

Ответ: $[1;2]$.

8. Сумма модулей

Задание. Найдите все значения ***a,*** при которых следующая система имеет хотя бы одно решение

$$\begin{cases} (\ln(f(x))-\ln a)^2+(y^2-5000y+a)^2=0, \\ n=50, \\ z^2-2(a-10^6)z+25\cdot 10^{10}=0, \\ f(x)=|x|+|x+1^2|+|x+2^2|+|x+3^2|+\ldots+|x+(2n)^2|. \end{cases}$$

Шаг 1. Выполняем преобразования, выделяя полные квадраты, приводящие к более обозримому виду, находим ОДЗ:
ОДЗ: $f(\boldsymbol{x}) > 0$; $\boldsymbol{a} > 0$.

$$\begin{cases} f(x) = a; \\ (y-2500)^2 = 6{,}25\cdot 10^6 - a; n = 50, \\ z^2 - 2(a-10^6)z + (a-10^6)^2 = (a-10^6)^2 - (0{,}5\cdot 10^6)^2, \\ f(x) = |x| + |x+1^2| + |x+2^2| + |x+3^2| + \ldots + |x+(2n)^2|. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = a; \\ (y-2500)^2 = 6{,}25\cdot 10^6 - a; n = 50, \\ (z-a+10^6)^2 = (a-1{,}5\cdot 10^6)(a-0{,}5\cdot 10^6), \\ f(x) = |x| + |x+1^2| + |x+2^2| + |x+3^2| + \ldots + |x+(2n)^2|. \end{cases}$$

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения:
Из второго и третьего уравнений легко получаем два ограничения на параметр.
Функция $f(\boldsymbol{x})$ кусочно-линейная, то есть имеет экстремум в одной из точек
$0; -1^2; -2^2; -3^2;\ldots -\boldsymbol{n}^2;\ldots -4\boldsymbol{n}^2$.
При неограниченном росте $\boldsymbol{x}$ функция возрастает, значит, она имеет минимум $\boldsymbol{f_{min}}$.
Она непрерывная, значит, имеет решения тогда и только тогда, когда $f(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{f_{min}}$.
Задача свелась к нахождению минимума $f(\boldsymbol{x})$, который для суммы модулей обычно достигается в средней точке.

Шаг 3. Из уравнения для $\boldsymbol{y}$ находим, что решение существует, если $\boldsymbol{a} \leq 6{,}25\cdot 10^6$.
Из уравнения для $\boldsymbol{z}$ находим, что решение существует, если $\boldsymbol{a} \leq 0{,}5\cdot 10^6$ или $\boldsymbol{a} \geq 1{,}5\cdot 10^6$.
Найдём $f(\boldsymbol{x})$, если $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{n}^2$.
$f(\boldsymbol{x}) = |-\boldsymbol{n}^2| + |-\boldsymbol{n}^2 + 1^2| + |-\boldsymbol{n}^2 + 2^2| + |-\boldsymbol{n}^2 + 3^2| + \ldots + |-\boldsymbol{n}^2 + (\boldsymbol{n}-1)^2| + |-\boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{n}^2| + |-\boldsymbol{n}^2 + (\boldsymbol{n}+1)^2| + \ldots + |-\boldsymbol{n}^2 + (2\boldsymbol{n})^2| =$
$= \boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{n}^2 - 1^2 + \boldsymbol{n}^2 - 2^2 + \boldsymbol{n}^2 - 3^2 + \ldots + \boldsymbol{n}^2 - (\boldsymbol{n}-1)^2 + 0 + (\boldsymbol{n}+1)^2 - \boldsymbol{n}^2 + \ldots + (2\boldsymbol{n})^2 - \boldsymbol{n}^2 =$
$= -1^2 - 2^2 - 3^2 - \ldots - (\boldsymbol{n}-1)^2 + (\boldsymbol{n}+1)^2 + (\boldsymbol{n}+2)^2 + \ldots + (2\boldsymbol{n})^2 =$
$= (2\boldsymbol{n})^2 + (2\boldsymbol{n}-1)^2 - 1^2 + (2\boldsymbol{n}-2)^2 - 2^2 + \ldots + (\boldsymbol{n}+1)^2 - (\boldsymbol{n}-1)^2 =$
$= (2\boldsymbol{n})(2\boldsymbol{n} + (2\boldsymbol{n}-2) + (2\boldsymbol{n}-4) + \ldots + 2) =$
$= (4\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n}-1) + (\boldsymbol{n}-2) + \ldots + 1) = 2\boldsymbol{n}^2(\boldsymbol{n}+1) = 255000$.
Сравним $f(-\boldsymbol{n}^2)$ и $f(-(\boldsymbol{n}+1)^2)$. Слагаемые от $|\boldsymbol{x}|$ до $|\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{n}+1)^2|$ возрастут на $(2\boldsymbol{n}+1)$, остальные на столько же уменьшатся. Сумма возрастёт на $(2\boldsymbol{n}+1)$.
Сравним $f(-\boldsymbol{n}^2)$ и $f(-(\boldsymbol{n}-1)^2)$. Слагаемые от $|\boldsymbol{x}|$ до $|\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{n}-1)^2|$ уменьшатся на $(2\boldsymbol{n}-1)$, остальные настолько же возрастут. Сумма возрастёт на $(2\boldsymbol{n}-1)$. Аналогично доказывается, что функция монотонно возрастает при удалении от точки $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{n}^2$.
Функция $f(\boldsymbol{x})$ кусочно-линейная, то есть она линейно (монотонно) изменяется между точками $0; -1^2; -2^2; -3^2;\ldots -\boldsymbol{n}^2;\ldots -4\boldsymbol{n}^2$ и принимает любое значение, не меньшее, чем $\boldsymbol{f_{min}}$.= 255000.
Значит, уравнение $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$ имеет решение при $\boldsymbol{a} \geq 0{,}255\cdot 10^6$.
Ответ: Система имеет решение, если $\boldsymbol{a} \in [255000;500000] \cup [1500000;6250000]$.