Примеры решения заданий типа С5 для ЕГЭ 2011

1. Произведение квадрата и линейной функции

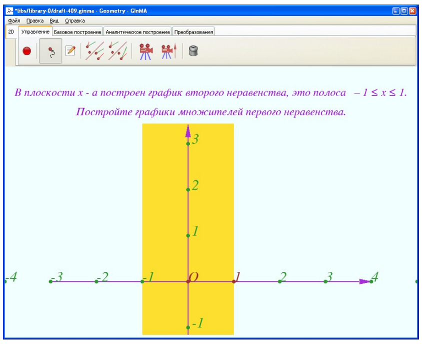
Задание. Найдите те значения параметра, при которых множество решений неравенства $(a - x^2)(x - 2 + a) < 0$ не содержит решений неравенства $x^2 \le 1$.

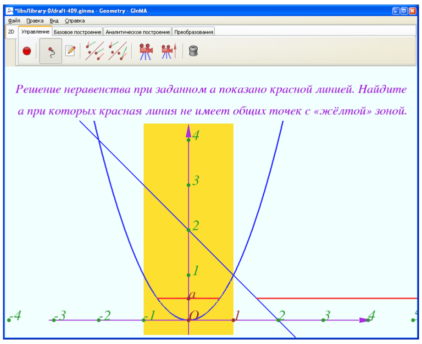
Решение: Пусть графики множителей левой части первого неравенства построены в плоскости $x - a$. Тогда решение неравенства – это части плоскости, ограниченные построенными кривыми. При каждом пересечении графика меняется знак произведения, поэтому достаточно определить знак выражения в одной точке и приписать знаки всем остальным частям, меняя знак при пересечении графика.

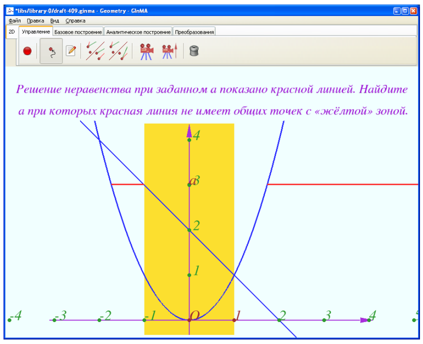
График второго неравенства - это полоса $-1 \le x \le 1$.

Строим график неравенства. Это парабола $a = x^2$ и прямая $a = 2 - x$. В точке $(x, a) = (0; 1)$ левая часть отрицательная, неравенство выполнено. Следовательно, область решения неравенства - это область выше параболы и ниже прямой при $-2 \le x \le 1$. Иначе область решения неравенства - это область ниже параболы и выше прямой. Решения в зависимости от параметра показаны красной горизонтальной линией, определяемой параметром a.

Видно, что условие выполнено при $a \le 0$ или $3 \le a$.







2. Квадратичная функция

2. Найдите число корней уравнения $x^2 - 8 = (2p - 1)x$ на промежутке $x \in (2; 3]$.

2а. Найдите число корней уравнения $x^2 + k_1 = (2p - 1)x$ на промежутке $x \in (k_2; k_3]$.

2в. Найдите число корней уравнения $\log_2^2 x - 8 = (2p - 1)\log_2 x$ на промежутке $x \in (4; 8]$.

2с. Найдите число корней уравнения $\log_2^2 x + k_1 = (2p - 1)\log_2 x$ на промежутке $x \in (2^{k_2}; 2^{k_3}]$.

Решение: Поскольку $x = 0$ не является корнем, перейдём к эквивалентному уравнению $x - \frac{8}{x} = 2p - 1$. На промежутке $x \in (2; 3]$ левая часть монотонно возрастает и принимает значения в полуинтервале $(-2; \frac{1}{3}]$. Выражение $2p - 1$ принимает эти значения при $p \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$. Если p в указанном промежутке, уравнение имеет ровно один корень. Иначе корней нет.

При отрицательных k_1 решения однотипны. Функция $y = x + \frac{k_1}{x}$ монотонно возрастает и принимает значения $y \in (y_1; y_2], y_1 = \frac{k_1 + k_2^2}{k_2}; y_2 = \frac{k_1 + k_3^2}{k_3}$. Ответ: один корень при $p \in (p_1; p_2], p_1 = \frac{k_1 + k_2 + k_2^2}{2k_2}; p_2 = \frac{k_1 + k_3 + k_3^2}{2k_3}$, иначе корней нет.

Для положительных значений k_1 в общем случае функция $y = x + \dfrac{k_1}{x}$ не является монотонной и при $x_0 = \sqrt{k_1}$ принимает наименьшее значение $y_0 = 2\sqrt{k_1}$. Выражение $2p - 1$ принимает это значение при $p_0 = \sqrt{k_1} + \dfrac{1}{2}$. В этом случае возникают области, где возможны два решения, одно и отсутствие решений. Всего пять различных возможностей:

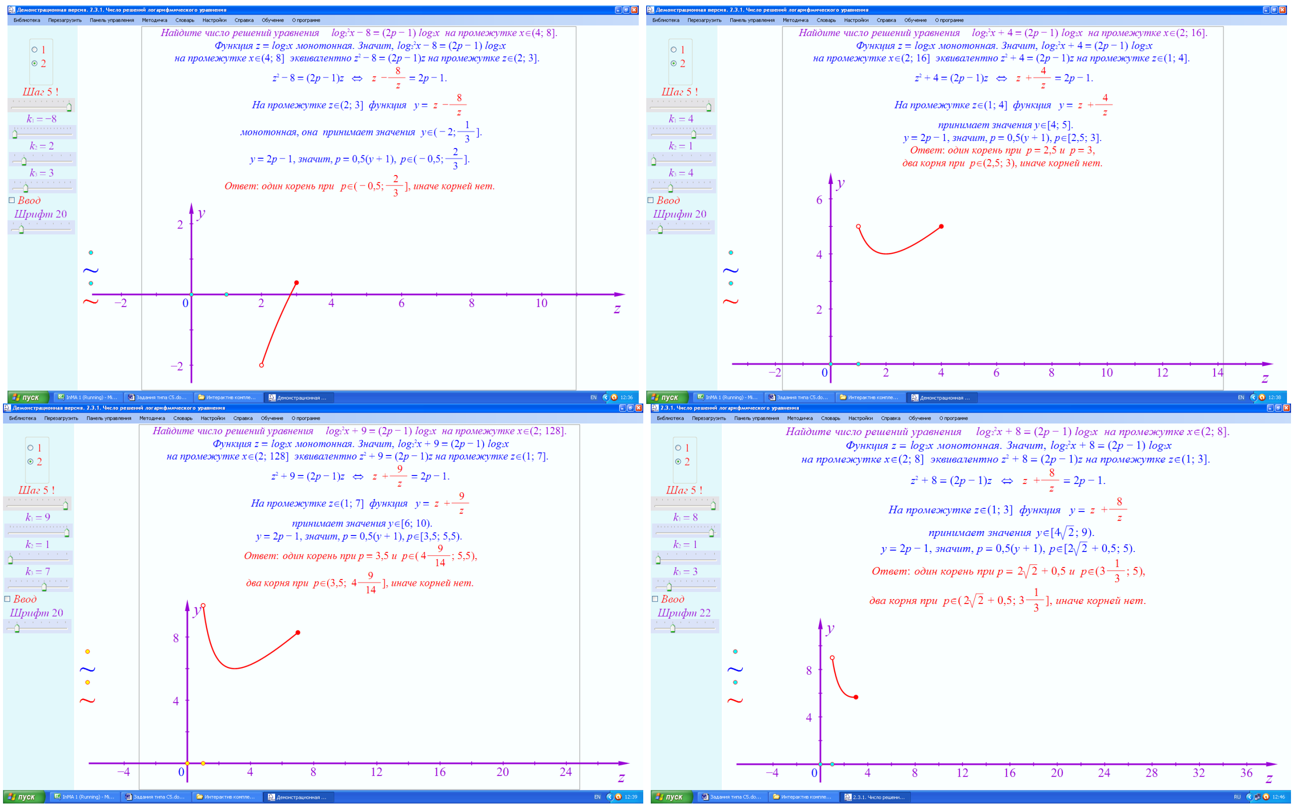
Если $x_0 \le k_2$ уравнение имеет один корень при $p \in (p_1; p_2], p_1 = \dfrac{k_1 + k_2 + k_2^2}{2k_2}; p_2 = \dfrac{k_1 + k_3 + k_3^2}{2k_3}$, иначе корней нет.

Если $x_0 \ge k_3$ уравнение имеет один корень при $p \in [p_2; p_1)$, иначе корней нет.

Если $k_2 \le x_0 \le k_3$ и $y_1 < y_2$ уравнение имеет один корень при $p = p_0$, $p \in [p_1; p_2]$, два корня при $p \in (p_0; p_1)$, иначе корней нет.

Если $k_2 \le x_0 \le k_3$ и $y_1 = y_2$ уравнение имеет один корень при $p = p_0$ и $p = p_1$, два корня при $p \in (p_0; p_1)$, иначе корней нет.

Если $k_2 \le x_0 \le k_3$ и $y_1 > y_2$ уравнение имеет один корень при $p = p_0$, $p \in (p_1; p_2)$, два корня при $p \in (p_0; p_2)$, иначе корней нет. Все они рассмотрены в компьютерном решении.



Решение в плоскости x – a

Задание. Найдите x, удовлетворяющее систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + \log_2(a - 2 - y) = \log_2(a - x), \\ y + 2\sqrt{x} = 1. \end{cases}$$

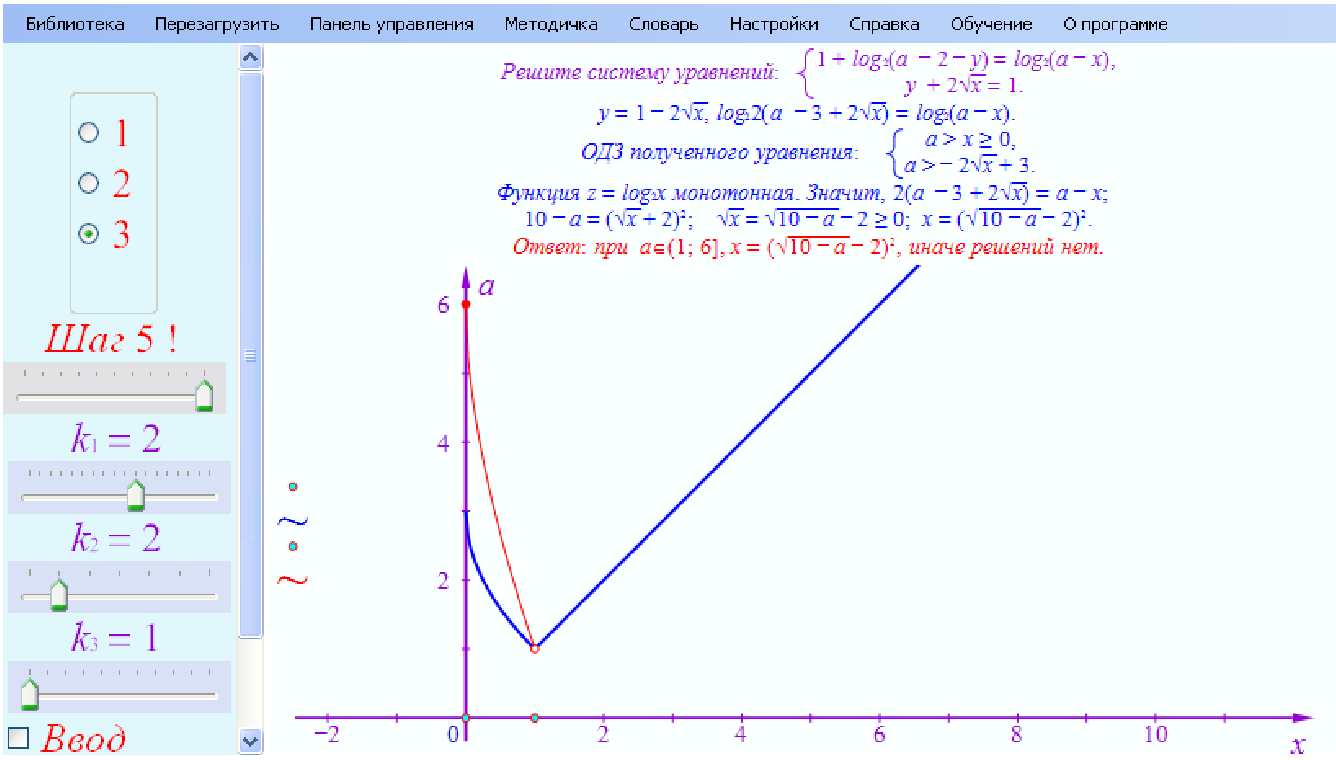
Решение: Область допустимых значений уравнений $x \ge 0$; $a > x$; $a > 2 + y = 3 - 2\sqrt{x}$.

Подставив значение y из второго уравнения в первое, получим:

$$2(a - 2 - y) = a - x \iff a = 10 - (\sqrt{x} + 2)^2;\ x = (\sqrt{10 - a} - 2)^2$$

График уравнения и неравенств в плоскости $x - a$ показывает, что $a \in (1; 6]$.

Ответ: $a \in (1; 6]$.



Найти параметр, при котором существует решение

Задание. Найдите все значения $a\in[0;2\pi]$, при которых следующая система имеет хотя бы одно решение
$$\begin{cases} x^2+y^2+2z(x+y+z)-2\sin a=0; \\ (2x+1)\sin^2\dfrac{a}{2}+3y^2\sqrt{x}+a^2\sqrt{z}+\sin\dfrac{3a}{2}=0. \end{cases}$$

Шаг 1. Выполняем преобразования, выделяя полные квадраты, приводящие к более обозримому виду, находим ОДЗ:

ОДЗ: $x\ge 0$; $z\ge 0$. Пусть $t=\sin\dfrac{a}{2}$.

$$\begin{cases} x^2+y^2+2z(x+y+z)-2\sin a=0; \\ (2x+1)\sin^2\dfrac{a}{2}+3y^2\sqrt{x}+a^2\sqrt{z}+\sin\dfrac{3a}{2}=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)^2+(y+z)^2=2\sin a; \\ 2x\sin^2\dfrac{a}{2}+3y^2\sqrt{x}+a^2\sqrt{z}=t(t-1)(3+4t). \end{cases}$$

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения:

Второе уравнение явно неразрешимо обычными методами, число уравнений меньше, чем число неизвестных, решать надо, находя противоречие. Обычное противоречие – разные знаки в левой и правой части. В ходе решения необходимо найти все возможные значения параметра и представить для каждого из них хотя бы ***одно решение системы***.

Шаг 3. Если $a\in[0;2\pi]$, то $0{,}5a\in[0;\pi]$, $t=\sin\dfrac{a}{2}\in[0;1]$, $t(t-1)(3+4t)\le 0$.

Правая часть второго уравнения неотрицательная.

Значит, обе части второго уравнения равны нулю.

Отсюда $t(t-1)(3+4t)=0$. Если $t=0$, то $a=0$ или $a=2\pi$. Если $t=1$, то $a=\pi$.

Во всех случаях $2\sin a=0$ и система имеет решение $x=y=z=0$.

Ответ: $a=0;\ \pi;\ 2\pi$.

Задание о наименьшем значении

Задание. Найдите наименьшее значение выражения $x^2+y^2-2a(x+y)$ при условиях

$\cos\frac{\pi xy}{2} = 1$ и $a \in (0; 2)$.

Шаг 1. Выполняем преобразования, выделяя полные квадраты, приводящие к более обозримому виду, находим ОДЗ:

$$\cos\frac{\pi xy}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi xy}{2} = 2k\pi, k \in Z \Leftrightarrow xy = 4k, k \in Z.$$

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - 2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{y}^2 - 2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{xy} - \boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{a})^2 - 8\boldsymbol{k} - \boldsymbol{a}^2.$$

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения:
Решения уравнения условия существенно различны при $\boldsymbol{k} = 0$ и $\boldsymbol{k} \neq 0$. Выражение убывает с ростом $\boldsymbol{k}$. Целесообразно найти решения при разных $\boldsymbol{k}$ и из них выбрать наименьшее.

Шаг 3. Если $\boldsymbol{k} = 0$, то либо $\boldsymbol{x} = 0$, либо $\boldsymbol{y} = 0$. В обоих случаях наименьшее значение
$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - 2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{a})^2 - \boldsymbol{a}^2 \geq -\boldsymbol{a}^2$ при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, либо $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$.
Если $\boldsymbol{k} < 0$, то наименьшее значение $-8\boldsymbol{k} - \boldsymbol{a}^2 > -\boldsymbol{a}^2$.

Если $\boldsymbol{k} > 0$, то $|x + y| = \left|x + \frac{4k}{x}\right| \geq 2\sqrt{|x|\left|\frac{4k}{x}\right|} = 2\sqrt{4k} = 4\sqrt{k} \geq 4 > |a|$

$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - 2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{a})^2 - 8\boldsymbol{k} - \boldsymbol{a}^2 \geq \left(4\sqrt{k} - a\right)^2 - 8k - a^2 = 8\sqrt{k}(\sqrt{k} - a) \geq 8(1 - a)$

Значит, наименьшее значение выражения:
либо $-\boldsymbol{a}^2$ (при $\boldsymbol{k} = 0$),
либо $8(1 - \boldsymbol{a})$ (при $\boldsymbol{k} = 1$).
Эти выражения равны при $a = 4 \pm 2\sqrt{2}$.
Если $a \geq 4 - 2\sqrt{2}$, то наименьшее значение выражения $-\boldsymbol{a}^2 \leq 8(1 - \boldsymbol{a})$.
Если $0 < a < 4 - 2\sqrt{2}$, то наименьшее значение выражения $8(1 - \boldsymbol{a}) < -\boldsymbol{a}^2$.
Ответ: $-\boldsymbol{a}^2$ при $a \geq 4 - 2\sqrt{2}$, $8(1 - \boldsymbol{a})$ при $0 < a < 4 - 2\sqrt{2}$.

Решения на основе свойства монотонности

1. Задание. Решите уравнение $4\arcsin(2^x - 3) - \arccos(5^x - 24) = \frac{4\pi}{x}$.

Шаг 1. Проверяем очевидный корень, находим ОДЗ:

Если $\boldsymbol{x} = 2$, то $4\arcsin(2^x - 3) - \arccos(5^x - 24) = 4\arcsin 1 - \arccos 1 = 2\pi = \frac{4\pi}{x}$.

Уравнение выполнено. $-1 \leq 2^x - 3 \leq 1$, $-1 \leq 5^x - 24 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \boldsymbol{x} \leq 2$.

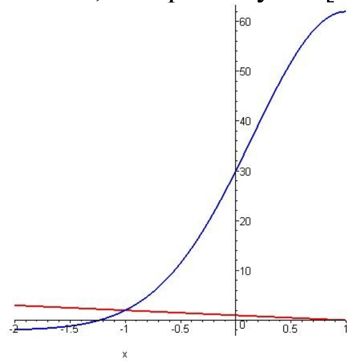
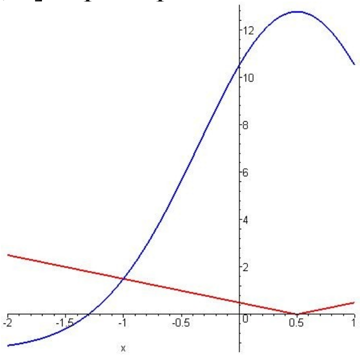
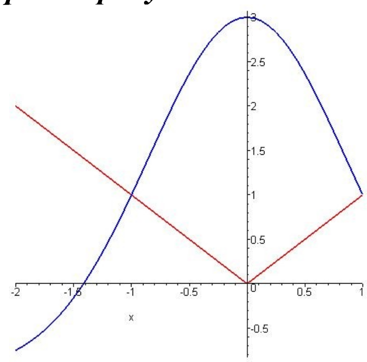
Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения:
Показательная функция с аргументом, большим, чем 1, монотонно возрастает.
Функция арксинус со знаком плюс монотонно возрастает.
Функция арккосинус со знаком минус монотонно возрастает.
Композиция двух монотонно возрастающих функций (сложная функция) монотонно возрастает.
Сумма двух монотонно возрастающих функций монотонно возрастает.
Значит, функция, стоящая в левой части уравнения, монотонно возрастает.
Функция, стоящая в правой части в ОДЗ, убывает.
Следовательно, число корней не более, чем 1. Это рассуждение обосновывает ответ.
Ответ: 2.

2. Задание. При каких значениях $\boldsymbol{a}$ уравнение $|2a - 1|\left(0.5^{x^2 + 4ax + 4a - 2} - 1\right) = |x + 2a|$ имеет ровно два корня на промежутке $[-2; 1]$.

Шаг 1. Проверяем очевидные корни, исследуем границы промежутка, находим точки максимума и области монотонности.
Если $x = -1$, то $|2a-1| = |2a-1|$, это ***корень уравнения*** для любых a.
Если $x = 1$, то левая часть $|2a-1|(2^{1-8a}-1)$. Она больше правой $|2a+1|$ при $a < 0$, равна правой при $a = 0$ и меньше правой при $a > 0$.
Если $x = -2$, то левая часть $|2a-1|(2^{2(2a-1)}-1)$. Она больше правой $|2a-2|$ при $a > 0.75$, равна правой при $a = 0.75$ и меньше правой при $a < 0.75$.
Производная левой части $|2a-1| \cdot 0.5^{x^2+4ax+4a-2}(-2x-4a)\ln 2$. Она равна нулю при $a = 0{,}5$ и при $x + 2a = 0$. Левая часть имеет наибольшее значение при $x + 2a = 0$. Правая часть имеет наименьшее значение при $x + 2a = 0$.
Если $x + 2a = 0$, то левая часть $|2a-1|\left(2^{(2a-1)^2+1}-1\right) > |2a-1| > 0$, правая часть равна нулю. В этой точке левая часть всегда больше правой (при $a \neq 0{,}5$).

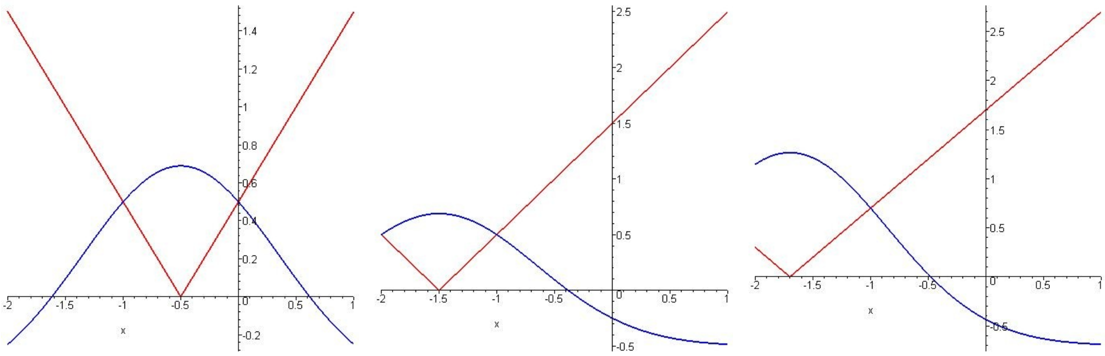
Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения:
Требуется понять, при каких значениях параметра уравнение имеет ровно один корень либо на [–2; –1), либо на (– 1; 1]. При этом ясно, что функция в левой части уравнения возрастает в левой части графика и убывает в правой. Функция в правой части уравнения убывает в левой части графика и возрастает в правой.

Пусть $a \leq -0{,}5$. На промежутке [– 2; 1] левая часть монотонно возрастает, правая монотонно убывает. Корень $x = -1$ единственный. ***На левом рисунке*** (см. ниже) $a = -0{,}5$, график левой части показан синим, график правой показан красным.
Пусть $-0{,}5 < a < 0$. На промежутке $[-2;\ -2a]$ левая часть монотонно возрастает, правая монотонно убывает. Корень $x = -1$ единственный. На промежутке $[-2a;\ 1]$ левая часть монотонно убывает, правая монотонно возрастает. В точке $x = 1$ левая часть больше правой – корней нет. Значит, на промежутке [– 2; 1] корень единственный. ***На среднем рисунке*** $a = -0{,}25$.
Пусть $a = 0$. На промежутке $[-2;\ -2a]$ левая часть монотонно возрастает, правая монотонно убывает. Корень $x = -1$ единственный. На промежутке $[-2a;\ 1]$ левая часть монотонно убывает, правая монотонно возрастает. В точке $x = 1$ левая часть равна правой – это второй корень. Значит, на промежутке [– 2; 1] корней ровно два. ***На правом рисунке*** $a = 0$.

Пусть $0 < a < 0{,}5$. На промежутке $[-2;\ -2a]$ левая часть монотонно возрастает, правая монотонно убывает. Корень $x = -1$ единственный. На промежутке $[-2a;\ 1]$ левая часть монотонно убывает, правая монотонно возрастает. В точке $x = 1$ левая часть меньше правой – ровно один корень. На промежутке [– 2; 1] корней два. ***На левом рисунке*** (см. ниже) $a = 0{,}25$.
Пусть $0{,}5 < a < 0{,}75$. В точке $x = -2$ левая часть меньше правой. На промежутке $[-2;\ -2a]$ левая часть монотонно возрастает, правая монотонно убывает. В точке $x = -2a$ левая часть больше правой. На промежутке имеется ровно один корень. На промежутке $[-2a;\ 1]$ левая часть монотонно убывает, правая монотонно возрастает. Корень $x = -1$ единственный. ***На среднем рисунке*** $a = 0{,}75$. Здесь меньший корень равен – 2.

Пусть 0,75 < ***a***. В точке ***x*** = – 2 левая часть больше правой. На промежутке [– 2; –2***a***] левая часть монотонно возрастает, правая монотонно убывает. В точке ***x*** = –2***a*** левая часть больше правой. На промежутке корней нет. На промежутке [–2***a***; 1] левая часть монотонно убывает, правая монотонно возрастает. Корень ***x*** = – 1 единственный. ***На правом рисунке a*** = 0,85.



Ответ: [0; 0.5)∪(0,5; 0.75].

Решение на основе противоречия

1. Задание. Решите уравнение

$$\sqrt{5-|y|}\cdot(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33})=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi^2}{4}.$$

Шаг 1. Проверяем очевидные соотношения, находим противоречия:
Ищем наибольшее значение правой части.

$$|\arcsin \boldsymbol{x}|\le\pi/2,\ |\arccos \boldsymbol{x}|\le\pi\ \Rightarrow(\arcsin \boldsymbol{x})^2+(\arccos \boldsymbol{x})^2\le\pi^2/4+\pi^2=5\pi^2/4.$$

Правая часть неположительная и равна нулю, только если arccos ***x*** = π, ***x*** = –1.
Ищем наименьшее значение группы тригонометрических слагаемых.

$$5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x=2{,}5(1-\cos 2x)-3\sin 2x-4{,}5(1+\cos 2x)=-7\cos 2x-3\sin 2x-2\ge$$
$$\ge-2-\sqrt{7^2+3^2}=-2-\sqrt{58}$$

Сравним последнее слагаемое левой части и модуль найденного наименьшего значение суммы.

$$11368<11449\Leftrightarrow 14^2\cdot 58<107^2\Leftrightarrow 14\sqrt{58}<107\Leftrightarrow 70\sqrt{58}+356<891\Leftrightarrow(\sqrt{58}+2)^3<27\cdot 33\Leftrightarrow 2+\sqrt{58}<3\sqrt[3]{33}$$
.

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения. Сопоставим ***знаки частей*** уравнения.
Правая часть неположительная и равна нулю, только если arccos ***x*** = π, ***x*** = –1.
Выражение в скобках в левой части положительное. Левая часть неотрицательная и может быть равна нулю, только если множитель корень равен нулю, то есть ***y*** = ±5.
Ответ: (–1; ±5).

2. Задание. Решите неравенство, если $1\le \boldsymbol{x}\le 3$

$$(x^2-4x+3)\cdot\log_{1/\sqrt{2}}(\cos^2\pi x+\cos x+2\sin^2(0{,}5x))\ge 2.$$

Шаг 1. Проверяем очевидные соотношения, находим противоречия:
Выражение под знаком логарифма $\cos^2\pi \boldsymbol{x}+\cos \boldsymbol{x}\ 2\sin^2 0{,}5\boldsymbol{x}=\cos^2\pi \boldsymbol{x}+1$.
Выражение изменяется от 1 до 2, его логарифм по основанию 2 изменяется от 0 до 1, логарифм по основанию $\sqrt{2}$ изменяется от 0 до 2, логарифм по основанию $1/\sqrt{2}$ изменяется от 0 до -2:

$$-2\le\log_{1/\sqrt{2}}(1+\cos^2\pi x)\le 0$$. Если ***x*** = 2, логарифм равен (– 2).

Множитель: $-1\le \boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{x}+3=(\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}-3)\le 0$. Если ***x*** = 2, множитель равен (– 1).

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения. Найдём максимум модуля левой части неравенства.

$$|(x^2-4x+3)|\cdot|\log_{1/\sqrt{2}}(\cos^2\pi x+1)|=|(x-2)^2-1|\cdot 2\cdot\log_2(\cos^2\pi x+1)\le 2$$

Максимум достигается при $x = 2$. Исходное неравенство может быть выполнено (как равенство) только при этом значении переменной.

Ответ: 2.

3. Задание. Решите систему $\begin{cases}\dfrac{\log_2(|a|x^2-3x+4)}{\log_2(-3x+4)}=5^{-(x+1)^2|x|}\\ x\le 1\end{cases}$.

Шаг 1. Проверяем очевидные соотношения, находим противоречия:

$$x\le 1\Rightarrow\ -3x+4\ge 1;|a|x^2-3x+4\ge -3x+4\Rightarrow\ \log_2(|a|x^2-3x+4)\ge\log_2(-3x+4)$$

$$\frac{\log_2(|a|x^2-3x+4)}{\log_2(-3x+4)}\ge 1$$

$0<5^{-(x+1)^2|x|}\le 1$, равенство с единицей достигается при $x = 0$ и при $x = (-1)$.

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения. Сравним минимум левой части уравнения и максимум правой его части. Они равны единице. Решением уравнения могут быть $x = 0$ и при $x = (-1)$. Если $a = 0$, то оба корня удовлетворяют уравнению, иначе, только $x = 0$.

Ответ: Если $a = 0$, то $x = 0$ и $x = (-1)$. Иначе $x = 0$.

4. Задание. Решите систему $\begin{cases}x^2+qx+3=0,\\ \sin^2 q\pi+\cos^2\dfrac{\pi}{2}x+2^{y^2}=\sin\dfrac{\pi x}{2}.\end{cases}$.

Шаг 1. Проверяем очевидные соотношения, находим противоречия:

$$\sin^2 q\pi+\cos^2\frac{\pi}{2}x+2^{y^2}-\sin\frac{\pi x}{2}\ge 0+1-\sin^2\frac{\pi}{2}x+1-\sin\frac{\pi x}{2}\ge 0,$$

равенство с нулём достигается, если

$\sin(\pi x/2) = 1$; $x = 1 + 4k$, $k\in Z$, $y = 0$

и $\sin q\pi = 0$, $q\in Z$.

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения. Решением второго уравнения системы могут быть пары $x = 1 + 4k$, $k\in Z$ и $q\in Z$.

Из первого уравнения, найдём: $q=-x-\dfrac{3}{x}$. Целые значения это выражение принимает, если

$x = 1; 3; -1; -3$.

Если $k = 0$, то $x = 1$; $q = -4$.

Если $k = -1$, то $x = -3$; $q = 4$.

Ответ: Если $q = 4$, то $(-3;0)$. Если $q = -4$, то $(1;0)$.

Использование линейной комбинации синуса и косинуса

1. Задание. При каких значениях параметра уравнение $2\cos^2 2^{2x-x^2}=a+\sqrt{3}\sin 2^{2x-x^2+1}$ имеет решение.

Решение. Пусть $t=2^{2x-x^2+1}$. Тогда уравнение имеет вид $2\cos^2\dfrac{t}{2}=a+\sqrt{3}\sin t$

$\cos t+1=a+\sqrt{3}\sin t\ \Leftrightarrow\ a=1+\cos t-\sqrt{3}\sin t=1+2\sin(t+\varphi)$, $a\in[-1;3]$.

Ответ: $a\in[-1;3]$.

2. *Задание.* Найдите все значения **p**, при каждом из которых существует единственная пара чисел (**x;y**), удовлетворяющая условиям $\begin{cases} x^2+2px+3p^2+3p+3\le 3\sin y-4\cos y, \\ 0\le y\le 2\pi. \end{cases}$.

Шаг 1. Проверяем очевидные соотношения, находим противоречия:

$$|3\sin y-4\cos y|\le \sqrt{3^2+4^2}=5,$$

то есть правая часть принимает любые значения на отрезке [–5; 5], причёт значения (–5) и 5 принимаются ровно при одном значении $y\in[0;2\pi]$.

$$x^2+2px+3p^2+3p+3=(x+p)^2+2p^2+3p+3\ge 2p^2+3p+3.$$

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения.

Левая часть первого неравенства принимает значения $2p^2+3p+3$ и большие. Правая часть – значения 5 и меньшие.

Решением является единственная пара чисел, если $2p^2+3p+3=5$, то есть при ***p = –2*** и ***p = 0,5.***

Ответ: ***p = –2*** и ***p = 0,5***.

Решение со стыковкой производных

Задание. Найдите все значения параметра ***a***, при которых ровно два решения имеет система:

$$\begin{cases} \log_{|a|} y=(x^2+3x+2)^4 \\ -x^2+y=3x+2 \end{cases}.$$

Шаг 1. Выполняем стандартные преобразования:

ОДЗ: ***y*** > 0.

$$\begin{cases} \log_{|a|} y=(x^2+3x+2)^4 \\ -x^2+y=3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{|a|} y=(x^2+3x+2)^4 \\ y=x^2+3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{|a|} y=y^4 \\ y=x^2+3x+2 \end{cases}$$

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения. Каждое положительное решение ***y*** первого уравнения порождает пару значений ***x***, то есть требуется найти такие значения ***a,*** при которых первое уравнение преобразованной системы имеет ровно один положительный корень.

Строим графики обеих частей уравнения. Если $0<|a|<1$, то логарифм монотонно убывает от $+\infty$, y^4 монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, корень один.

Если $|a|>1$, то корень один, только если график логарифма касается графика степени.

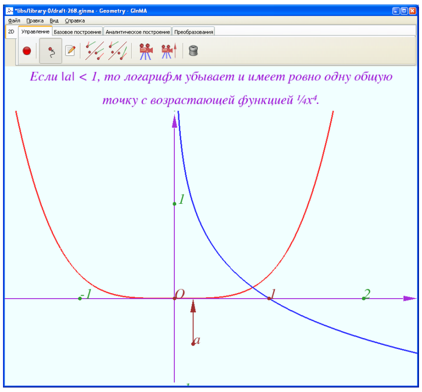
Приравниваем в точке касания производные функций:

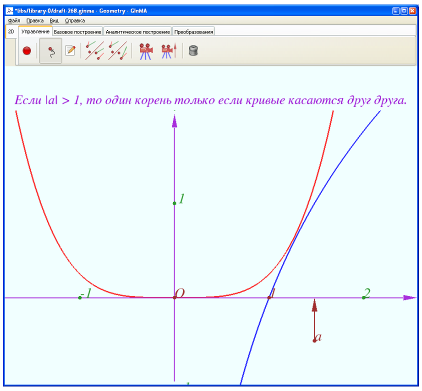
$$\begin{cases} \log_{|a|} y=y^4 \\ (\log_{|a|} y)'=(y^4)' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln y}{\ln|a|}=y^4 \\ \dfrac{1}{y\ln|a|}=4y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln y}{\ln|a|}=y^4 \\ \dfrac{1}{4\ln|a|}=y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y=\dfrac{1}{4} \\ \ln|a|=\dfrac{1}{4y^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt[4]{e} \\ \ln|a|=\dfrac{1}{4e} \end{cases}.$$

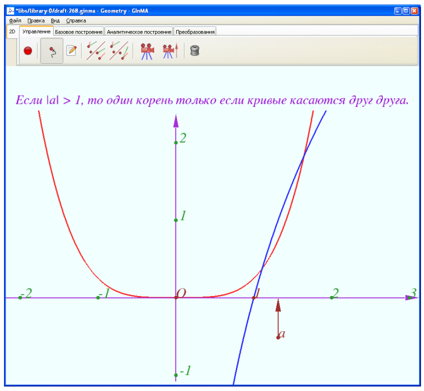
$$a_0=\pm\exp\left(\frac{1}{4e}\right)$$

Найдём число корней для ***y*** (каждый из которых порождает пару значений ***x***). Если $1<|a|<a_0$, то два корня, если $|a|>a_0$, то решений у уравнения нет.

Ответ: $a\in\left\{-\exp\left(\frac{1}{4e}\right)\right\}\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left\{\exp\left(\frac{1}{4e}\right)\right\}$.







Задание а. Найдите все значения параметра ***a,*** при которых ровно два решения имеет система:

$$\begin{cases} 4e\log_{a^2} y = (x^2+3x+2)^4 \\ -x^2+y=3x+2 \end{cases}. \quad \begin{cases} y=\sqrt[4]{e} \\ a=\pm\sqrt{e} \end{cases} \qquad \textbf{\textit{Ответ}}:\ a\in\left\{-\sqrt{e}\right\}\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left\{\sqrt{e}\right\}.$$

Особенность – экстремум достигается только в одной точке

Задание. Найдите все значения ***a***$\in(-1;1)$, при которых следующее выражение принимает наибольшее значение лишь при одной паре чисел (***x;y***):

$$5-77\sqrt{x^2-2ax+y^2-8y+17}.$$

Шаг 1. Выполняем преобразования, выделяя полные квадраты, приводящие к более обозримому виду, находим ОДЗ:

$$x^2-2axy+y^2-8y+17=x^2-2axy+(ay)^2+(1-a^2)y^2-8y+17=$$

$$=(x-ay)^2+(1-a^2)y^2-2\cdot 4y+\frac{4^2}{1-a^2}-\frac{4^2}{1-a^2}+17=(x-ay)^2+\left(\sqrt{1-a^2}\,y-\frac{4}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2+\frac{1-17a^2}{1-a^2}$$

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения:

Под корнем сумма двух квадратов и числа, зависящего от параметра, которое может изменять знак. Корень в изучаемом выражении стоит со знаком минус, значит, выражение принимает наибольшее значение, если подкоренное выражение принимает наименьшее допустимое значение. Если выражение может изменять знак, то наименьшее допустимое значение – это нуль. Это значение достигается во всех точках, где подкоренное выражение равно нулю. Записывая решение, нужно найти хотя бы ***два корня*** уравнения, две точки, где достигается наибольшее значение исходной функции. Иначе наименьшее значение может достигаться и в одной точке.

Шаг 3. Если $a\in\left[-\frac{1}{\sqrt{17}};\frac{1}{\sqrt{17}}\right]$, то $\frac{1-17a^2}{1-a^2}\geq 0$. Наименьшее значение подкоренного выражения достигается в единственной точке, где равны нулю оба квадрата, то есть:

$$\begin{cases} \sqrt{1-a^2}\,y-\frac{4}{\sqrt{1-a^2}}=0; \\ x-ay=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{4}{1-a^2}; \\ x=\frac{4a}{1-a^2}. \end{cases}$$

В этой точке функция

$$5-77\sqrt{x^2-2ax+y^2-8y+17}=5-77\sqrt{(x-ay)^2+\left(\sqrt{1-a^2}\,y-\frac{4}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2+\frac{1-17a^2}{1-a^2}}$$ принимает

наибольшее значение.

Если $a\in\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{17}};1\right)$, то $\frac{1-17a^2}{1-a^2}<0$. Наименьшее значение подкоренного выражения достигается в каждой точке, где оно равно нулю, например, в точках

$y = \frac{4}{1 - a^2}$, $(x - ay)^2 + \frac{1 - 17a^2}{1 - a^2} = 0 \Leftrightarrow$ $x = ay \pm \sqrt{\frac{17a^2 - 1}{1 - a^2}}$ оба квадрата, то есть:

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{\sqrt{17}}; \frac{1}{\sqrt{17}}\right]$.