

## Примеры решения заданий типа С6 для ЕГЭ 2011

### Текстовые задания

**1. Задание.** Про натуральные числа  $a, b, c$  известно, что числа  $2a + 4b + c$  и  $a + 6b + 2c$  оканчиваются в десятичной записи на цифру 0. На какую цифру может оканчиваться число  $b$ , если число  $a$  оканчивается на цифру 2?

**Решение:**

Число  $2(2a + 4b + c) - (a + 6b + 2c) = 3a + 2b$  оканчивается в десятичной записи на цифру 0 (оно, как и два предыдущих, делится на 10).

Число  $3a$  оканчивается в десятичной записи на цифру 6, значит, число  $2b$  оканчивается в десятичной записи на цифру 4, а число  $b$  может оканчиваться только на 2 или 7.

Тройки чисел  $(a = 2, b = 2, c = 8)$  и  $(a = 2, b = 7, c = 8)$  удовлетворяют условию.

**Комментарий:** Доказываем, что  $b$  может оканчиваться только на две цифры, и приводим пример существования решений с этими цифрами.

В ходе решения избавляемся от числа  $c$ , которое не оговорено в задаче.

**Ответ:** 2 или 7.

**2. Задание.** Три фермера привели для продажи баранов, первый – 10, второй – 16, третий – 26. В первый день они продавали баранов по одной цене. Каждый продал хоть одного барана, но не всех. Во второй день они продавали баранов дешевле и вновь по одной цене. Были проданы все бараны и каждый фермер получил 3500 денежных единиц. По какой цене продавались бараны в первый день?

**Решение:** Пусть продажи первого дня  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , цены  $p$  и  $q$ . Тогда продажи второго дня:  $10 - x_1, 16 - x_2$  и  $26 - x_3$ , выручка:

$$3500 = px_1 + q(10 - x_1) = px_2 + q(16 - x_2) = px_3 + q(26 - x_3).$$

Объёмы продаж удовлетворяют неравенствам  $10 > x_1 > x_2 > x_3 > 0$ . Это логически следует из того, что одинаковая выручка требует больше дорогих продаж у того, у которого меньше товара. Формально, вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$(p - q)(x_1 - x_2) = 6q > 0, \text{ откуда } x_1 > x_2.$$

Цена  $p$  удовлетворяет неравенству  $p > 350$ , так как  $3500 = px_1 + q(10 - x_1) < px_1 + p(10 - x_1) = 10p$ .

Цена  $q$  удовлетворяет неравенству  $q < 135$ , так как  $3500 = px_3 + q(26 - x_3) > qx_3 + q(26 - x_3) = 26q$ .

Разность цен  $p - q$  удовлетворяет неравенству  $p - q > 350 - 135 = 215, 2q < 270$ .

Из  $x_1 = \frac{3500 - 10q}{p - q}; x_2 = \frac{3500 - 16q}{p - q}; x_3 = \frac{3500 - 26q}{p - q}$  найдём, что

$$x_1 - x_2 = \frac{6q}{p - q}; x_2 - x_3 = \frac{10q}{p - q}; 2(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3) = \frac{2q}{p - q}.$$

Последнее выражение целое и меньше, чем 1,5, то есть оно равно единице,  $p - q = 2q, p = 3q$ .

$x_1 - x_3 = \frac{16q}{p - q} = 8$ , то есть  $x_1 = 9, x_3 = 1, p - q = 250, p = 375$ .

**Комментарий:** Важно, что  $p$  и  $q$  не обязательно целые, а число баранов всегда целое.

**Ответ:** 375.

**3. Задание.** Рота солдат прибыла на парад прямоугольным строем по 24 человека в ряд, однако, не все прибывшие солдаты участвовали в параде. Участников перестроили так, что число рядов уменьшилось на 2, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Сколько солдат в роте, если её можно построить в виде квадрата?

**Решение:** Пусть число рядов  $n$ , число солдат  $m^2$ . Тогда  $m^2 = 24n = 6 \times 2^2 n$ , то есть  $n$  кратно 6.

$m^2 = 24n > (n-2)((n-2) + 24)$   $n^2 < 52$ ,  $n < 8$ . Условием удовлетворяет только число  $n = 6$ .

**Комментарий:** Важно составить неравенство по высказыванию «не все прибывшие солдаты участвовали в параде».

**Ответ:** 144.

**4. Задание.** Две бригады муравьёв одинаковой производительности каждый вырыли по одинаковой норке. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 муравьёв больше, то она закончила бы работу на 2 ч раньше. Найти число муравьёв в каждой бригаде.

**Решение:** Пусть число муравьёв в первой бригаде  $n$ , во второй бригаде  $m$ , вся работа имеет объём  $a$  часов работы одного муравья.

Тогда  $\frac{a}{n} - \frac{a}{n+5} = 2$ ;  $\frac{a}{m} - \frac{a}{n} = \frac{1}{2}$ . Чтобы упростить уравнение, умножим второе на  $m^2$  и

приравняем левые части:  $\frac{a}{n} - \frac{a}{n+5} = \frac{4a}{m} - \frac{4a}{n} \Leftrightarrow \frac{5}{n} - \frac{1}{n+5} = \frac{4}{m} \Leftrightarrow m = \frac{4n^2 + 20n}{4n + 25} = n - \frac{5n}{4n + 25}$

Последняя дробь положительная, целое число, она не больше, чем  $5/4$ , значит, она равна единице и  $n = 25$ ,  $m = 24$ .

**Ответ:** в первой 25, во второй 24.

**5. Задание.** Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по два числа. Найти наибольшее из них, если произведение чисел одной группы больше произведения чисел другой группы на 2009?

**Решение:** В парах чётное-чётное и нечётное-нечётное (иначе разность чётная).

Пусть числа  $n-1$ ;  $n$ ;  $n+1$ ;  $n+2$ . Тогда разность:

$n(n+2) - (n+1)(n-1) = 2n+1 = 2009$ ;  $n = 1004$ ;  $n+2 = 1006$ .

**Ответ:** 1006.

**6. Задание.** Пусть  $p(x) = x^2 + mx + n$ . Известно, что  $p(x) = 0$  при  $x = p(-1)$  и  $x = p(-2)$ . Найдите все такие  $p(x)$ .

**Решение:**  $p(-1) = 1 - m + n$ , и  $p(-2) = 4 - 2m + n$ .

Если  $p(-1) \neq p(-2)$ , то по теореме Виета:

$$p(-1) + p(-2) = -m = (1 - m + n) + (4 - 2m + n) = 5 - 3m + 2n \Leftrightarrow m = n + 2,5.$$
$$p(-1) = -1,5; p(p(-1)) = -1,5 - 0,5n = 0, p(x) = x^2 - 0,5x - 3.$$

Если  $p(-1) = p(-2)$ , то  $m = 3$ ,  $p(-1) = n - 2$ ;  $p(p(-1)) = n^2 - 2 = 0$ .

**Ответ:**  $x^2 - 0,5x - 3$  и  $x^2 + 3x \pm \sqrt{2}$ .

**7. Задание.** Для каждого положительного числа функция  $f(x)$  равна первой после запятой цифре в десятичной записи числа  $x$ . Найти наименьший положительный корень уравнения

$$f(x + 1/3) = f(x/3).$$

**Решение:** Пусть  $x < 1$ . Если  $f(x + 1/3) = 0 = f(x/3)$ , то из левого равенства  $x \in [2/3; 2/3+0,1)$ , а из второго  $x \in [0; 0,3)$ . Противоречие.

Если  $f(x + 1/3) = 1 = f(x/3)$ , то из левого равенства  $x \in [2/3 + 0,1; 2/3+0,2)$ , а из второго  $x \in [0,3; 0,6)$ . Противоречие.

Если  $f(x + 1/3) = 2 = f(x/3)$ , то из левого равенства  $x \in [2/3 + 0,2; 2/3+0,3)$ , а из второго  $x \in [0,6; 0,9)$ . Решение  $x \in [2/3 + 0,2; 0,9)$  и наименьшее значение  $2/3 + 0,2 = 13/15$ .

**Комментарий:** Строим графики функций  $f(x)$ . Стрелки остриём вправо длиной 0,1 каждая с единичным шагом по ординате,  $f(x/3)$  (график получаем растяжением по оси абсцисс в три

раза) и  $f(x + 1/3)$  (сдвиг  $f(x)$  на  $1/3$  влево). Первая общая точка – это левая граница стрелки графика  $f(x + 1/3)$  с ординатой 2.

**Ответ:** 13/15.

**8. Задание.** Найдите все пары таких взаимно простых натуральных чисел  $a$  и  $b$ , что если к десятичной записи числа  $a$  приписать справа через запятую десятичную запись числа  $b$ , то получится десятичная запись числа, равного  $b/a$ .

**Решение:** Число  $a > 1$ , так как иначе дробь равна целому числу.

Число  $a < b/a \Leftrightarrow a^2 < b$ .

Пусть  $b$  – однозначное число,  $1 \leq b \leq 9$ ,  $a^2 < 9$ ,  $a < 3$ . Тогда  $a = 2$  и по условию:  $a + b/10 = b/a$ , то есть  $b = 5$ .

Пусть  $b$  – двузначное число,  $1 \leq b \leq 99$ ,  $a^2 < 99$ ,  $a < 10$ . Тогда по условию:  $a + b/100 = b/a$   
 $\Leftrightarrow 100a^2 = b(100 - a)$ .

$100 - a$  на 100 не делится, значит,  $b$  – это делитель числа 100.

$$a + b/100 = b/a \Leftrightarrow (100a + b)a = 100b$$

Числа  $a$  и  $b \leq 99$  взаимно простые,  $100a + b$  на 100 не делится,  $a < 10 < 100$ , значит,  $a$  – это делитель числа 100.

Если  $a = 2$  или  $a = 5$ , то  $b$  не целое.

Пусть  $b$  –  $n$ -значное число,  $1 \leq b \leq 10^n - 1$ ,  $a^2 < b \leq 10^n - 1$ ,  $a < 10^{n/2}$ .

Тогда по условию:  $a + b/10^n = b/a \Leftrightarrow 10^n(b - a^2) = ab$ .

Докажем, что числа  $b - a^2$  и  $ab$  – взаимно простые.

Допустим противное, то есть  $c$  – простой общий делитель этих чисел.

Числа  $a$  и  $b$  взаимно простые, значит,  $c$  – делитель ровно одного из чисел  $a$  и  $b$ .

Пусть  $c$  – делитель  $a$  взаимно простой с  $b$ .

Тогда  $c$  – делитель  $a^2$  и алгебраическая сумма  $b - a^2$ , одно из слагаемых в которой делится на  $c$ , а другое не делится, не может делиться на  $c$  – противоречие.

Пусть  $c$  – делитель  $b$  взаимно простой с  $a$ .

Тогда  $c$  – не может быть делителем  $a^2$  и алгебраическая сумма  $b - a^2$ , одно из слагаемых в которой делится на  $c$ , а другое не делится, не может делиться на  $c$  – противоречие.

Равенство  $10^n(b - a^2) = ab$ , где числа  $b - a^2$  и  $ab$  взаимно простые, возможно, только если

$$b - a^2 = 1 \text{ и } 10^n = ab.$$

Из  $1 < a^2 < b$  и взаимной простоты натуральных чисел  $a$  и  $b$ , заключаем, что  $a = 2^n$ ,  $b = 5^n$ .

$b - a^2 = 1 = 5^n - 4^n \geq 1$ , равенство возможно только при  $a = 2$ ,  $b = 5$ ,  $n = 1$ .

**Комментарий:** Самый трудный переход – догадаться использовать взаимную простоту чисел  $b - a^2$  и  $ab$ . Без этого удаётся выполнить только частичное решение для конкретных количеств цифр числа  $b$ .

**Ответ:**  $a = 2$ ,  $b = 5$ .