Примеры решения заданий типа С6 для ЕГЭ 2011

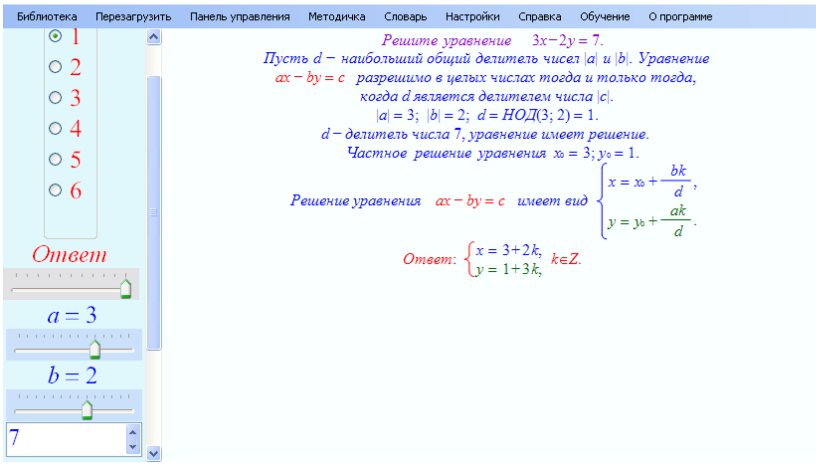
Оглавление

1. Простейшие целочисленные уравнения

1. Решите уравнение $ax - by = c$.

Пусть d − наибольший общий делитель чисел $|a|$ и $|b|$. Уравнение $ax + by = c$ разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда d является делителем числа $|c|$.

Если пара $(x_0; y_0)$ − это частное решение уравнения $ax - by = c$, то общее решение этого уравнения имеет вид $\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{d}k, \\ y = y_0 + \dfrac{a}{d}k, k \in Z. \end{cases}$ Задача сводится к выяснению разрешимости уравнения, подбору частного решения и записи общего решения.

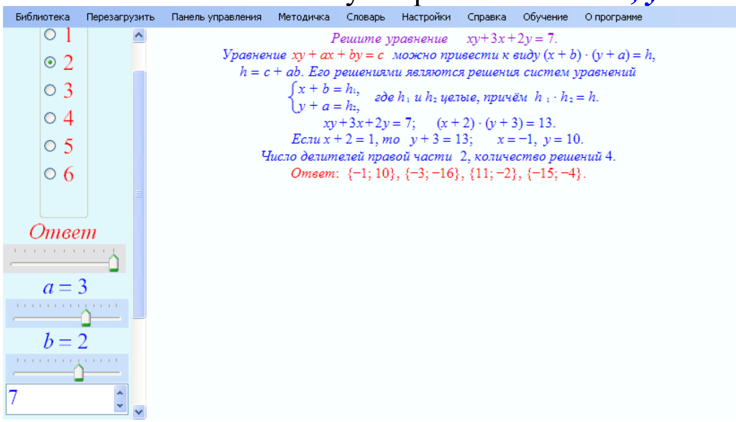


2. Решите уравнение $xy + ax + by = c$.

Уравнение $xy + ax + by = c$ можно привести к виду $(x + b) \cdot (y + a) = h$, $h = c + ab$. Его решениями являются решения систем уравнений $\begin{cases} x + b = h_1, \\ y + a = h_2, \end{cases}$ где h_1 и h_2 целые, причём $h_1 h_2 = h$.

Количество таких систем вдвое больше, чем количество делителей числа $|h|$, так как в качестве h_1 может выступать любой делитель числа $|h|$ и этот же делитель со знаком минус. Каждая система имеет единственное целочисленное решение $\begin{cases} x = -b + h_1, \\ y = -a + \dfrac{h}{h_1}. \end{cases}$

Особый случай $h = c + ab = 0$. В этом случае решение $x = -b$, $y = -a$.

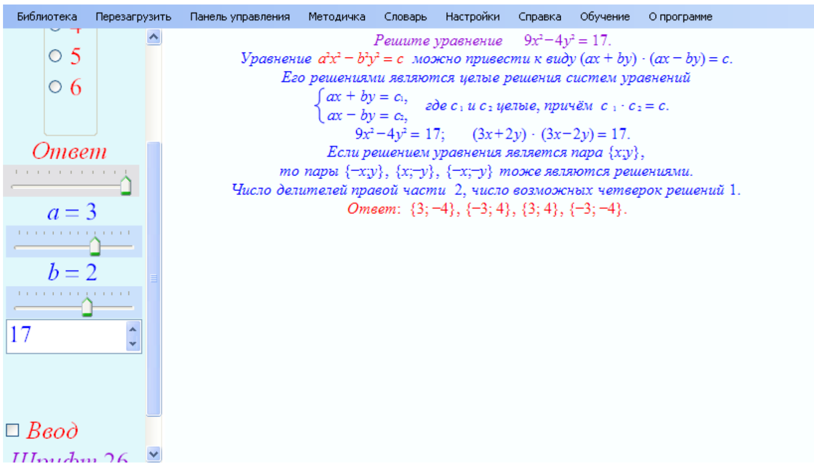


3. Решите уравнение $a^2x^2 - b^2y^2 = c$.

Уравнение $a^2x^2 - b^2y^2 = c$ можно привести к виду $(ax + by) \cdot (ax - by) = c$. Его решениями являются целочисленные решения систем уравнений $\begin{cases} ax + by = c_1, \\ ax - by = c_2, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{c_1 + \dfrac{c}{c_1}}{2a}, \\ y = \dfrac{c_1 - \dfrac{c}{c_1}}{2b}, \end{cases}$ где c_1 целый делитель числа c.

Количество таких систем вдвое больше, чем количество делителей числа $|c|$, так как в качестве c_1 может выступать любой делитель числа $|c|$ и этот же делитель со знаком минус. Если решением уравнения является пара $\{x;\ y\}$, то пары $\{-x;\ y\}$, $\{x;\ -y\}$, $\{-x;\ -y\}$ тоже являются решениями. Поэтому решения группируются в четвёрки (если $x = y$, $x = 0$ или $y = 0$, то в пары). Чтобы найти все решения достаточно решить только системы $\begin{cases} ax + by = c_1, \\ ax - by = c_2, \end{cases}$ где c_1 положительный делитель числа $|c|$. Решение системы может быть не целочисленным.

Особый случай $c = 0$. В этом случае решение сводится к совокупности уравнений $ax - by = 0$ и $ax + by = 0$, то есть к двукратному решению задачи **1**.



4. Решите уравнение $a^2x^2 = y^2 + 2by + c$. Пиктограмма **4**.

Уравнение $a^2x^2 = y^2 + 2by + c$ можно привести к виду

$(ax + y + b) \cdot (ax - y - b) = h = c - b^2$, где h_1 и h_2 целые, причём $h_1 h_2 = h$.

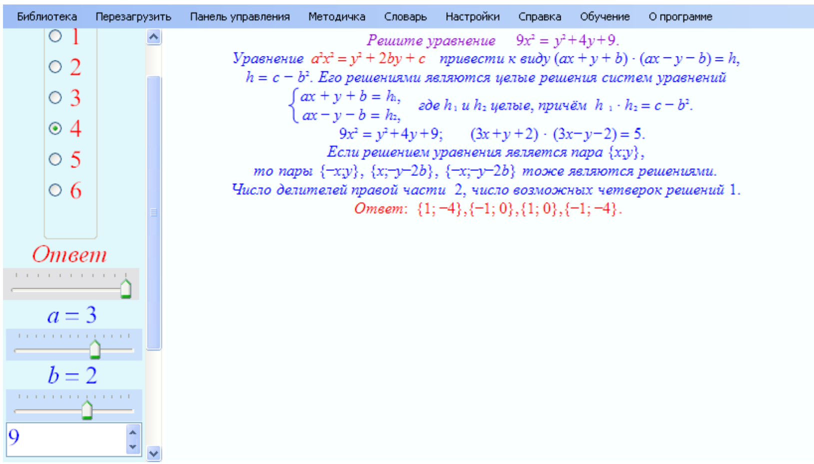
Его решениями являются целочисленные решения систем уравнений $\begin{cases} ax + y = h_1 - b, \\ ax - y = h_2 + b, \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{h_1 + \dfrac{c - b^2}{h_1}}{2a}, \\ y = \dfrac{h_1 - \dfrac{c - b^2}{h_1}}{2} - b, \end{cases}$$

где h_1 целый делитель числа h.

Количество таких систем вдвое больше, чем количество делителей числа $|h|$, так как в качестве h_1 может выступать любой делитель числа $|h|$ и этот же делитель со знаком минус. Если решением уравнения является пара $\{x;\ y\}$, то пары $\{-x;\ y\}$, $\{x;\ -2b - y\}$, $\{-x;\ ;\ -2b - y\}$ тоже являются решениями. Поэтому решения группируются в четвёрки (если $x = y$, $x = 0$ или $y = 0$, то в пары). Чтобы найти все решения достаточно решить только системы $\begin{cases} ax + y = h_1 - b, \\ ax - y = h_2 + b, \end{cases}$ где h_1 положительный делитель числа $|h|$. Решение системы может быть не целочисленным.

Особый случай $c = b^2$. В этом случае решение сводится к совокупности уравнений $ax - y - b = 0$ и $ax + y + b = 0$, то есть к двукратному решению задачи **1**.



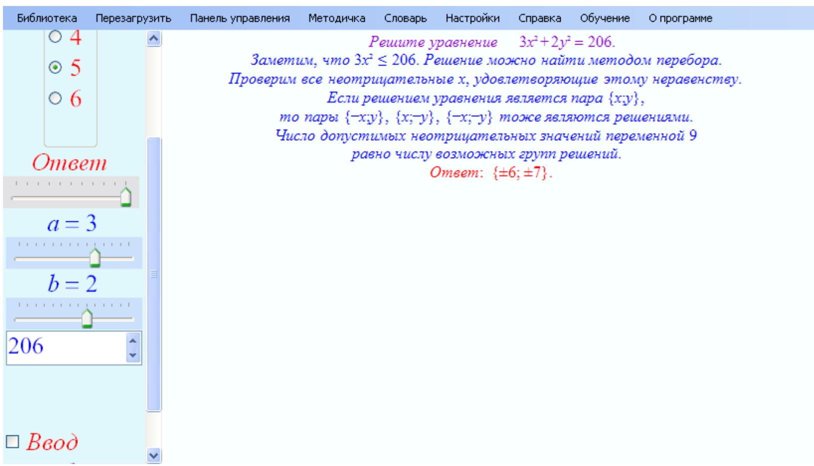
5. Решите уравнение $|a|x^2 + |b|y^2 = c$.

Уравнение $|a|x^2 + |b|y^2 = c$ при отрицательных c не имеет решения, так как в левой части уравнения стоит сумма неотрицательных чисел. Она не может быть равна отрицательному числу.

Уравнение $|a|x^2 + |b|y^2 = 0$ имеет решение $\{0;0\}$, так как в левой части уравнения стоит сумма неотрицательных чисел. Она равна нулю только если равно нулю каждое слагаемое.

Уравнение $|a|x^2 + |b|y^2 = c$ при положительных c решают методом перебора. Выбираем больший из коэффициентов и записываем ограничение на соответствующее слагаемое. Если $|a| > |b|$, то $|a|x^2 \le c$ и $0 \le x \le \sqrt{\dfrac{c}{|a|}}$. В этом диапазоне выполняем перебор возможных значений икса. Число вариантов для перебора $\left[\sqrt{\dfrac{c}{|a|}}\right] + 1$.

Если решением уравнения является пара $\{x; y\}$, то пары $\{-x; y\}$, $\{x; -y\}$, $\{-x; -y\}$ тоже являются решениями. Поэтому решения группируются в четвёрки (если $x = 0$ или $y = 0$, то в пары).



6. Решите уравнение $ax^2 + (ab + d)xy + bdy^2 = c$.

Уравнение $ax^2 + (ab + d)xy + bdy^2 = c$ можно привести к виду

$$(x + by) \cdot (ax + dy) = c.$$

Если $ab = d$, то $a\,(x + by)^2 = c$. Если $e = \sqrt{\dfrac{c}{a}}$ – не целое число, то решений нет, иначе решение – это совокупность решений уравнений $x + by = e$ и $x + by = -e$.

Если $ab \neq d$, то решениями являются решения систем уравнений $\begin{cases} x + by = c_1, \\ ax + dy = c_2, \end{cases}$ где c_1 и c_2 целые, причём $c_1c_2 = c$.

Количество таких систем вдвое больше, чем количество делителей числа $|c|$, так как в качестве c_1 может выступать любой делитель числа $|c|$ и этот же делитель со знаком минус. Каждая система имеет единственное решение $\begin{cases} x = \dfrac{c_2b - c_1d}{ab - d}, \\ y = \dfrac{c_2 - c_1a}{ab - d}. \end{cases}$ Из этих решений необходимо выбрать целочисленные.

6а. Задание. Решить уравнение $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7$ в целых числах.

Размышления: Решение задач в целых числах вида ***выражение равно числу*** часто сводится к разложению выражения и числа на множители. Далее составляются все возможные комбинации равенств множителей в левой и правой частях.

Техника разложения такова. Рассмотрим уравнение $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 0$, как зависимость y от x. Если $x = 0$, то $y = 0$. Если $x \neq 0$, то делим на x. Получаем:

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5\frac{y}{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = -1; \frac{y}{x} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow y + x = 0; 2y + 3x = 0.$$

Значит, $3x^2 + 5xy + 2y^2 = (x + y)(3x + 2y)$. *Равенство очевидно при прочтении* ***справа налево*** и доказывать его не требуется.

Решение: $3x^2 + 5xy + 2y^2 = (x + y)(3x + 2y) = 7$,

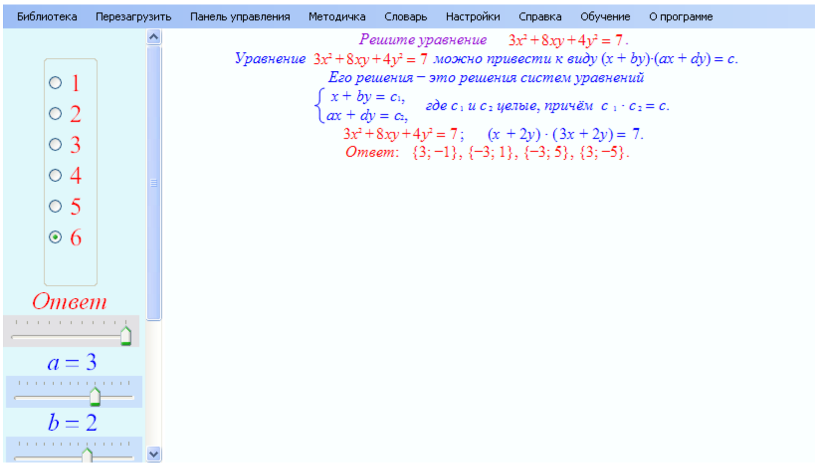
причём оба множителя в левой части – целые числа.

$$7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = (-1) \cdot (-7) = (-7) \cdot (-1)$$

– это все возможные разложения числа 7 на целые множители.

Если $x + y = 1$ и $3x + 2y = 7$, тогда $x = 5$; $y = -4$.
Если $x + y = 7$ и $3x + 2y = 1$, тогда $x = -13$; $y = 20$.
Если $x + y = -1$ и $3x + 2y = -7$, тогда $x = -5$; $y = 4$.
Если $x + y = -7$ и $3x + 2y = -1$, тогда $x = 13$; $y = -20$.

Ответ: $\{5; -4\}$; $\{-5; 4\}$; $\{-13; 20\}$; $\{13; -20\}$.


Библиотека
Перезагрузить
Панель управления
Методичка
Словарь
Настройки
Справка
Обучение
О программе
1
2
3
4
5
6
Ответ
a = 3
b = 2
Решите уравнение $3x^2+8xy+4y^2=7$.
Уравнение $3x^2+8xy+4y^2=7$ можно привести к виду $(x+by)\cdot(ax+dy)=c$.
Его решения − это решения систем уравнений
$\begin{cases} x+by=c_1, \\ ax+dy=c_2, \end{cases}$ где c_1 и c_2 целые, причём $c_1 \cdot c_2 = c$.
$3x^2+8xy+4y^2=7$; $(x+2y)\cdot(3x+2y)=7$.
Ответ: $\{3;-1\}, \{-3;1\}, \{-3;5\}, \{3;-5\}$.

2. Типичные целочисленные уравнения

1. ***Задание***. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0.$$

Решение:

$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = (3xy + x + 2y + 3)(3xy + x + y + 2) = 0.$

Пусть $3xy + x + 2y + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; (3x + 2)(3y + 1) = -7$. Целочисленные решения следуют из систем уравнений: $\begin{cases} 3x+2=\pm 7 \\ 3y+1=\mp 1\end{cases}$ и $\begin{cases} 3x+2=\pm 1 \\ 3y+1=\mp 7\end{cases}$

Пусть $3xy + x + y + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (3x + 1)(3y + 1) = -5$. Целочисленные решения следуют из систем уравнений: $\begin{cases} 3x+1=\pm 5 \\ 3y+1=\mp 1\end{cases}$ и $\begin{cases} 3x+1=\pm 1 \\ 3y+1=\mp 5\end{cases}$

Комментарий: Чтобы разложить первое уравнение в произведение целесообразно представить выражение, как квадратное по одной из переменных, найти его дискриминант и решение.

$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 =$

$=(9x^2 + 9x + 2)y^2 + (6x^2 + 18x + 7)y + (x^2 + 5x + 6) = 0;$

$D = (6x^2 + 18x + 7)^2 - 4(9x^2 + 9x + 2)(x^2 + 5x + 6) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2,$

$y_1 = \dfrac{-x-3}{3x+2};\; y_2 = \dfrac{-x-2}{3x+1}.$

Чтобы преобразовать в произведение выражение $3xy + x + 2y + 3 = 0$ выполняют преобразование:

$3xy + x + 2y + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; (3x + 2)(y + 1/3) = -3 + 2/3 \;\Leftrightarrow\; (3x + 2)(3y + 1) = -7.$

Ответ: (–2;0); (0;–2); (–3;0); (–1;2).

2. ***Задание***. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0.$$

Решение: $14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = (2x^2 + y^2 - 17)(7x^2 - 5y^2 - 3) = 0.$

Пусть $2x^2 + y^2 = 17$. Целочисленные решения удовлетворяют условию $x^2 < 8{,}5$; $|x| \le 2$ и находятся перебором.

Пусть $7x^2 = 5y^2 + 3$. Решение в целых числах $x^2 = 5t + 4$; $y^2 = 7t + 5$.

Остаток от деления y^2 на 7 может быть равен 0 ($y = 7m$), 1 ($y = 7m \pm 1$), 4 ($y = 7m \pm 2$) и 2 ($y = 7m \pm 3$), но не может быть равен 5. Противоречие, корней нет.

Комментарий: Чтобы разложить первое уравнение в произведение целесообразно представить выражение, как квадратное по одной из переменных, найти его дискриминант и решение.

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = -5y^4 - (3x^2 - 82)y^2 + (14x^4 - 125x^2 + 51) = 0.$$

$$y_1^2 = 17 - 2x^2;\; y_2^2 = 1{,}4x^2 - 0{,}6.$$

Ответ: (–2;±3); (2; ±3).

3. ***Задание***. Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1} - n! = 5(30k + 11)$.

Решение: Если n чётное, то слева чёт, справа нечёт. Противоречие.

Если $n = 1$, то $n^{k+1} - n! = 0$. Противоречие.

Если $n = 3$, то $3^{k+1} - 6 = 5(30k + 11)$; $3^{k+1} - 150k = 61$. Противоречие.

Если $n = 5$, то $5^{k+1} - 120 = 5(30k + 11)$; $5^{k-1} = 6k + 7$.

$k = 3$ – решение.

Если $k > 4$, $5^{k-1} > 25k > 6k + 7$. Противоречие.

Если $n > 5$, то $n!$ делится на 5, n^{k+1} делится на 5, $n = 5p$, *где* $p > 2$.

При этом $(5p)^{k+1}$ делится на **25**, $(5p)!$ делится на **25**, $5(30k + 11)$ не делится на **25**. Противоречие.

Ответ: $n = 5$, $k = 3$.

4. ***Задание***. Найдите число целых решений неравенства $\log_3(85 - x^2) \le 65 \cdot 4^x$.

Решение: Допустимые целочисленные значения левой части $x \in [-9; 9]$.

Если $x > -1$, то $\log_3(85 - x^2) < \log_3(84) < 5 < 65/4 < 65 \cdot 4^x$ - неравенство выполнено.

Если $x = -2$, то $\log_3(85 - x^2) = 4 < 65/16 = 65 \cdot 4^x$- неравенство выполнено.

Если $-9 \le x \le -3$, то $\log_3(85 - x^2) > \log_3 4 > 1{,}25 > 65/64 > 65 \cdot 4^x$ - неравенство не выполнено.Учтено, что $4^4 = 256 > 243 = 3^5 \Leftrightarrow 4\log_3 4 > 5$.

Корни $-2, -1, \ldots, 8, 9$ – всего двенадцать.

Ответ: 12.

5. ***Задание***. Найдите все тройки натуральных m, n и k таких, что $mnk = m + n + k$.

Решение: Если $m = n = k$, то $m^3 = 3m$ - нет целочисленных решений.

Упорядочим $m \ge n > k$ (или $m > n \ge k$). Тогда $nk = 1 + \dfrac{n+k}{3} < 3$, то есть $nk = 2$, значит, $n = 2$, $k = 1$. Наконец, $m = 3$.

Ответ: 1,2 и 3.

6. ***Задание***. Найдите все целые x и y такие, что $y^2 - 1 = 3 \cdot 2^x$.

Решение: Если $y = 2n$ чётное, то $y^2 - 1$ нечётное целое, $x = 0$, значит, $y = \pm 2$.

Если $y = 2n + 1$ нечётное, то $y^2 - 1 = 4n(n + 1)$, уравнение имеет вид $n(n + 1) = 3 \cdot 2^{x-2}$ Из двух последовательных чисел одно нечётное. Если $n = 3$, $y = 7$, $x = 4$. Если $n = 2$, $y = 5$, $x = 3$. Если $n = -3$, $y = -5$, $x = 3$. Если $n = -4$, $y = -7$, $x = 4$.

Ответ: (0; ±2); (3; ±5); (4; ±7).

7. ***Задание***. Найдите все целые x и y такие, что $x(x + 1) = y^2$.

Решение: $x(x + 1) = y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = (2y)^2 + 1 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 - (2y)^2 = 1$.

$\Leftrightarrow (2x + 1 - 2y)(2x + 1 + 2y) = 1$.

Если оба множителя равны единице, то $x = y = 0$.

Если оба множителя равны -1, то $x = -1$, $y = 0$.

Ответ: (0; 0); (– 1; 0).

8. ***Задание***. Сравните числа 2^{2009} и 5^{860}.

Решение: $2009 = 7 \cdot 287$; $861 = 3 \cdot 287$.

$128 = 2^7 > 5^3 = 125 \Leftrightarrow 2^{2009} = 2^{7 \cdot 287} > 5^{3 \cdot 287} = 5^{861} > 5^{860}$.

Ответ: $2^{2009} > 5^{860}$.

9. ***Задание.*** При каких значениях a уравнение

$$\log_{0.25}\left(\frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4a\pi}\right) - \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2)} = 0$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение.

Шаг 1. Проверяем ОДЗ, исследуем области монотонности.

Выражение под вторым корнем неотрицательное.

Если $x \ge \pi$, то $|\pi - x| - a + \pi + 2 = x - a + 2$, выражение неотрицательное при $a \in (-\infty; 2\pi - 6{,}8 + 0{,}2x] \cup [x + 2; +\infty)$.

Если $x < \pi$, то $|\pi - x| - a + \pi + 2 = 2\pi + 2 - x - a$, выражение неотрицательное при $a \in (-\infty; 2\pi - 6{,}8 + 0{,}2x] \cup [2\pi - x + 2; +\infty)$.

Логарифм, основание которого меньше, чем единица, неотрицателен. Выражение под знаком логарифма должно быть положительным, причём меньшим, чем единица.

$$0 < \frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4a\pi} \le 1$$

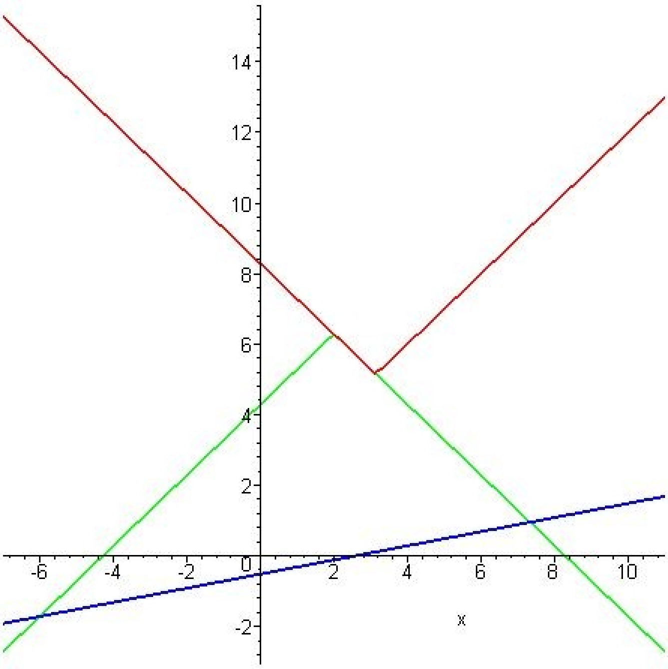
$$a^2 + 4\pi^2 + 4 \le 4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4a\pi \Rightarrow (a - 2\pi)^2 + 2(a - 2\pi)|x - 2| + |x - 2|^2 \le 0$$

$$(a - 2\pi + |x - 2|)^2 \le 0 \Rightarrow a = 2\pi - |x - 2|.$$

Шаг 2. Размышляем, выбираем способ решения:

Решения уравнения могут размещаться на зелёной линии $\boldsymbol{a} = 2\pi - |\boldsymbol{x} - 2|$, причём либо не выше синей прямой $\boldsymbol{a} = 2\pi - 6{,}8 + 0{,}2\boldsymbol{x}$, либо не ниже красной ломаной $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{max}(2\pi - \boldsymbol{x} + 2, \boldsymbol{x} + 2)$.

Целочисленные точки на зелёной ломаной - это $\boldsymbol{x} = 2$ ($\boldsymbol{a} = 2\pi$) и $\boldsymbol{x} = 3$ ($\boldsymbol{a} = 2\pi - 1$), а также $\boldsymbol{x} = -6$ ($\boldsymbol{a} = 2\pi - 8$).



Ответ: 2π, $2\pi - 1$, $2\pi - 8$.

10. Задание. Функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = \begin{cases} \log_2 \dfrac{x - 9}{x + 5} - 8, x \le -6 \\ -\dfrac{47 + 8x}{x + 6}, x > -6. \end{cases}$

Найдите все целые числа, которые являются корнями уравнения $f(f(x)) = x$.

Размышления на графике: Строим график по точкам от $x = -6$:

Если $x = -6$, то $f(x) = \log_2 15 - 8 \approx -4{,}1 < -4$.

Если $x = -7$, то $f(x) = -5$.

Если $x = -8$, то $f(x) = -5{,}5$ и монотонно убывает с уменьшением икса, причём $f(x) > -8$.

Если $x = -5$, то $f(x) = -\dfrac{8x + 47}{x + 6} = -8 + \dfrac{1}{x + 6}$, $f(x) = -7$.

Если $x = -4$, то $f(x) = -7{,}5$ и монотонно убывает с ростом икса, причём $f(x) > -8$.

Значит, при $x > -4$ целочисленных значений функция не принимает, причём $E(f) = (-8; +\infty)$.

Метод решения: Находим $E(f) = (-8; +\infty)$ и делаем вывод, что решение уравнения $f(f(x)) = x$ принадлежит промежутку $x \in (-8; +\infty)$, то есть множеству $\{-7; -6; \dots\}$.

Доказываем, что при $x > -4$ $f(f(x)) < -4$ и решений нет.

Проверяем остальные числа $\{-7; -6; -5\}$.

Решение: Логарифмическая функция $g(x) = \log_2 \frac{x-9}{x+5} - 8 = \log_2\left(1 + \frac{1}{-x-5}\right) - 8 > -8$ при $x < -6$ строго монотонно возрастающая, непрерывная, при больших по модулю отрицательных иксах сколь угодно близка к -8, $g(-6) = \log_2 15 - 8 \approx -4{,}1 < -4$, значит, на промежутке $x \in (-\infty; -6]$ $E(g) = (-8; \log_2 15 - 8\,]$.

Дробно-линейная функция $h(x) = -\frac{8x+47}{x+6} = -8 + \frac{1}{x+6}$ на промежутке $x \in (-6; +\infty)$ строго монотонно убывающая, непрерывная, при больших положительных иксах сколь угодно близка к -8, неограниченно возрастает при $x \to (-6)$ сверху ($x > (-6)$), значит на промежутке $x \in (-6; +\infty)$ $E(h) = (-8; +\infty)$.

$h(-5) = -7$, значит на промежутке $x \in (-5; +\infty)$ $E(h) = (-8; -7)$.

Следовательно, $E(f) = (-8; +\infty)$. $E(f(f)) \subset E(f) = (-8; +\infty)$. Целые корни уравнения $f(f(x)) = x$ принадлежат множеству $\{-7; -6; \dots\}$.

Заметим, что $f(-7) = -5$; $f(-5) = -7$. Отсюда числа (-7) и (-5) являются корнями уравнения $f(f(x)) = x$.

Пусть $x > -5$. Тогда $f(x) = h(x)$, $E(f) = E(h) = (-8; -7)$,

$$f(f(x)) < f(-7) < -5, \quad f(f(x)) < -5 < x.$$

Пусть $x = -6$. Тогда $f(x) = \log_2 15 - 8 \approx -4{,}1 < -4$, $f(f(x)) = h(\log_2 15 - 8)$ – это иррациональное (нецелое) число.

Ответ: $\{-7; -5\}$.