

Решения олимпиадных заданий

Задание 1. Береговая линия пруда состоит из n прямолинейных отрезков. Когда ударил мороз, лёд покрыл часть пруда на расстоянии до 100 м от береговой линии. Оказалось, что оставшаяся незамёрзшей часть пруда состоит из трёх несвязанных между собой частей. Найдите наименьшее n , при котором это возможно.

Решение. Если отрезков $n = 6$, то ситуация возможна (равнобедренный треугольник и в нём мол - часть его высоты-медианы от основания до некоторой точки, расстояния от которой до боковых сторон чуть меньше, чем 200 м.) При этом можно полагать, что отрезков фактически 4 (мол и основание считать за отрезки).

Ответ: не более, чем 6.

Задание 2. На плоскости выбрали n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые из них выделили красным цветом, а все остальные – синим. Затем каждую синюю точку соединили с каждой красной. Оказалось, что провели ровно 2011 отрезков. Найдите n .

Решение. Если красных вершин m , синих k , то число отрезков $mk = 2011$. Число 2011 простое, $m = 2011$, $k = 1$ (или наоборот). $n = m + k = 2012$.

Ответ: 2012.

Задание 3. Вершины правильного многоугольника занумеровали по порядку. Одну из вершин соединили отрезками с 1-й и 2011-й. Оказалось, что угол между этими отрезками равен 30° . Сколько сторон у этого правильного многоугольника?

Решение. Если вершин n , $k = 2011$, то дуге 30° соответствует $n - k + 1$ единичных дужек, дуге 180° соответствует n единичных дужек, $6(n - k + 1) = n$. $n = 6(k - 1)/5 = 2412$.

Ответ: 2412.

Задание 4. Найдите наименьшее значение суммы нескольких натуральных чисел, сумма попарных произведений которых равна 2011.

Решение. Известно тождество $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + \dots + x_nx_{n-1})$.

Сумма искомым чисел не может быть меньше 64, так как $63^2 = 3969 < 2 \cdot 2011$.

Рассмотрим 59 натуральных чисел, среди которых 54 единицы и 5 двоек. Сумма этих чисел равна 64, сумма их квадратов - 74, сумма попарных произведений может быть рассчитана с помощью тождества, она равна 2011.

Ответ: 64.

Задание 5. Найдите все целые n , для которых $(n - 1)^{(n-1)^n} + n^n(n + 1)^n + n^n = 2011$

Решение. Число $n = 3$ удовлетворяет уравнению. В силу монотонности левой части, других корней нет.

Ответ: 3.

Задание 6. Известно, что $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$, $(1 - x)(1 - y) = 2/3$, $(1 - y)(1 - z) = 1/3$. Найдите наименьшее и наибольшее возможные значения $(1 - x)(1 - z)$.

Решение. Пусть $X = 1 - x$; $Y = 1 - y$; $Z = 1 - z$; $Y \leq X$, $XY = 2/3$; $YZ = 1/3$.

Тогда $Y \leq X = 2/3Y \leq 1$ $Y \in \left[\frac{2}{3}; \sqrt{\frac{2}{3}} \right]$; $XZ = \frac{2}{9Y^2}$. Если $Y = 2/3$, то $XZ = 1/2$.

Ответ: $\frac{1}{2}$ ($x = 0, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{2}$); $\frac{1}{3}$ ($x = y = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, z = 1 - \frac{1}{\sqrt{6}}$).