Решения заданий олимпиады МГУ 2011

«Покори Воробьевы горы»

Задание 1. Какое время между 14:10 и 15:10 показывают часы в тот момент, когда угол между минутной и часовой стрелками равен 90°?

Решение: В 15.00 угол прямой.

Если угол поворота часовой стрелки α, то угол поворота минутной стрелки 12α, изменение угла между стрелками 11α. Угол между стрелками не изменился, значит, $11\alpha = 180°$. Промежуток времени связан с углом поворота стрелки в градусах соотношением $2\alpha = \frac{360}{11}$ минут $= 32\frac{8}{11}$ минут. Итак, до 15.00 пройдет найденное время и искомый момент – 14 часов $27\frac{3}{11}$ минуты.

Ответ: 14 часов $27\frac{3}{11}$ минуты и 15.00.

Задание 2. Решите неравенство $\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x \geq 1$.

Решение: Пусть $\sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2k\pi$; $\sin 1755x = -1$; $\cdot \sin 2011x = -1$.

Пусть $\sin x = -1$, $x = -\pi/2 + 2k\pi$; $\sin 1755x = 1$; $\cdot \sin 2011x = 1$.

В остальных случаях $|\sin x| < 1$ и выражение $|\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x| < 1$.

Ответ: $\pi/2 + k\pi$.

Задание 3. Петя последовательно выписывает целые числа, начиная с 21, так, что каждое следующее число меньше предыдущего на 4, а Вася, глядя на очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Васей сумм окажется ближайшей к 55?

Решение: Числа имеют вид $25 - 4n$. Они сначала положительные, затем отрицательные. Сумма сначала монотонно растёт, потом монотонно убывает. Расстояния малые для чисел $21 + 17 + 13 = 51$ (такое число получается при возрастании суммы) и $56 = 21 + 17 + 13 + 9 + 5 + 1 - 3 - 7 = 56$. Наименьшее расстояние равно 1 для суммы 56.

Ответ: 56.

Задание 4. Натуральные числа m, n таковы, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима, а дробь $\frac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сокращается?

Решение: Рассмотрим дробь $\frac{2(4m+3n)}{5m+2n} = \frac{8m+6n}{5m+2n} = \frac{3(5m+2n)-7m}{5m+2n} = 3 - \frac{7m}{5m+2n}$.

Второе слагаемое может быть сократимо только на 7.

Если $m = 8$, $n = 1$, дробь $\frac{32+3}{40+2} = \frac{35}{42}$ сократима на 7..

Ответ: 7.

Задание 5. Решите уравнение $\sqrt[3]{15x+1-x^2} + \sqrt[3]{27-15x+x^2} = 4$.

Ответ: 0,2,13,15.

Задание 6. В прямоугольной трапеции большая диагональ длины 11 делит острый угол трапеции в отношении 2 : 1, а расстояние от вершины тупого угла до этой диагонали равно 4. Какие значения может принимать площадь трапеции?

Решение: Пусть трапеция $ABCD$, $BD = l = 11$, $CE = h = 4$, $\angle CDB = \alpha$ или 2α, $\angle CBD = \angle ADB = 2\alpha$ или α.

Выразив части BD через углы, получим уравнение: $BD = BE + ED = h(ctg\alpha + ctg2\alpha) = l$

Упростив, найдём $3ctg\alpha - tg\alpha = 2l/h$ Положительное решение $tg\alpha = 0{,}5$ ($sin2\alpha = 0.8$, $cos2\alpha = 0.6$).

Площадь может принимать два значения

$S = 0.5\, l\,(0.5\, l\, cos^2\alpha + h) = 0.5\, l\,(0.4\, l + h) = 46{,}2$

или $S = 0.5\, l\,(\, l\, cos2\alpha\, sin2\alpha + h) = 0.5\, l\,(0.48\, l + h) = 51{,}04$.

Ответ: 46,2; 51,04.

Задание 7. Найдите наибольшее значение выражения

$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{2010} - x_{2011})^2 + (x_{2011} - x_1)^2$ при $x_1, \ldots, x_{2011} \in [0; 1]$.

Решение: Найдём наибольшее значение выражения $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$

Пусть $y_1 = \min(x_1, x_2, x_3)$, $y_3 = \max(x_1, x_2, x_3)$

$(y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 \le (0 - y_2)^2 + (y_2 - 1)^2 + (1 - 0)^2 = 2 + 2y_2^2 - 2y_2 \le 2$

при $y_2 = 0$ или $y_2 = 1$.

$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{2010} - x_{2011})^2 + (x_{2011} - x_1)^2 \le (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 1 + 1 + \ldots + 1 + (x_{2011} - x_1)^2 \le 2010$.

Ответ: 2010.

Задание 8. Решите систему

$$\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 + 3xy + 2xz - z - 10y + 5 = 0 \\ 49x^2 + 65y^2 + 49z^2 + -14xy - 98xz + 14yz - 182x - 102y + 182z + 233 = 0 \end{cases}$$

Решение: Второе уравнение преобразуем к виду $(7x - y - 7z - 13)^2 + 64(y - 1)^2 = 0$.

Ответ: $y = 1$; $x = 0$; $z = -2$; или $y = 1$; $x = 2/7$; $z = -12/7$.

Задание 9. В тетраэдре все плоские углы при одной вершине прямые. Некоторая точка пространства удалена от указанной вершины тетраэдра на расстояние 3, а от остальных его вершин на расстояния $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$. Найдите расстояния от центра описанной около тетраэдра сферы до каждой из его граней.

Решение: Пусть координаты точки (x_1, y_1, z_1), вершины тетраэдра $(x_2, 0, 0)$, $(0, y_2, 0)$, $(0,0,z_2)$.

По теореме Пифагора $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 9 \\ (x_2 - x_1)^2 + y_1^2 + z_1^2 = 5 \\ x_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + z_1^2 = 6 \\ x_1^2 + y_1^2 + (z_2 - z_1)^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 9 \\ (x_2 - x_1)^2 = x_1^2 - 4 \\ (y_2 - y_1)^2 = y_1^2 - 3 \\ (z_2 - z_1)^2 = z_1^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow$

$(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0$. $x_2 = x_1 = 2$; $y_2 = y_1 = \sqrt{3}$; $z_2 = z_1 = \sqrt{2}$.

Для такого тетраэдра центр описанной сферы находится в точке $\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ на середине диагонали соответствующего прямоугольного параллелепипеда.

Одна грань проходит через эту точку. Плоскости остальных граней – это $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $\left(0; 1; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Задание 10. Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в 2 слоя по 6 карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

Решение: Присвоим карандашам номера в соответствии с их длиной. Карандаши могут лечь одним из следующих способов:

1	2	3			
			10	11	12

1	2(3)				
3(2)			10	11	12

1	2	3			10(11)
				11(10)	12

1	2(3)				11(10)
3(2)				10(11)	12

Ясно, что надо сосчитать число способов заполнения одной из строк, а другая будет заполнена автоматически.
Для первой таблицы возможностей 20:
456,457,458,459, 467,468,469, 478, 479, 489, 567,568,569, 578,579,589, 678, 679, 689, 789.

Вторая таблица содержит пары эквивалентных вариантов, в которых карандаши 2 и 3 меняются местами. Для неё число возможностей 28:
Считать удобно, заполняя два значения в нижней строке
46,47,48,49, 56,57, 58,59, 67, 68, 69, 78,79, 89.

Третья таблица эквивалентна второй и число вариантов тоже 28.

Четвёртая таблица содержит возможности перестановки чисел 2 и 3 и 10 и 11. То есть число вариантов умножаем на 4. Всего вариантов 56.
При выборе возможных вариантов, учитываем, что в нижней строке должны быть обязательно большие номера.
456, 457, 458, 459, 467, 468,469, 478,479, 489, 567, 568,569, 579.

Ответ: 132.