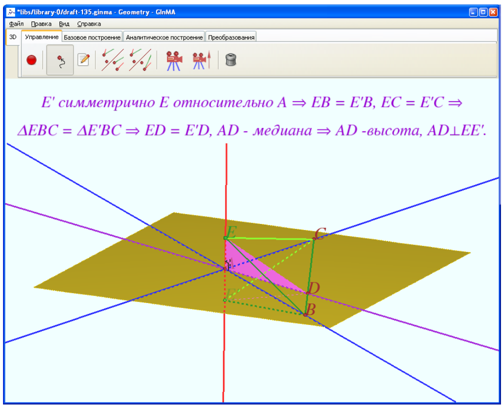
Перпендикулярность прямой и плоскости

Интерактивные исследования признаков перпендикулярности, решения задач о серединном перпендикуляре, нахождении ГМТ; теорема о двух перпендикулярах.

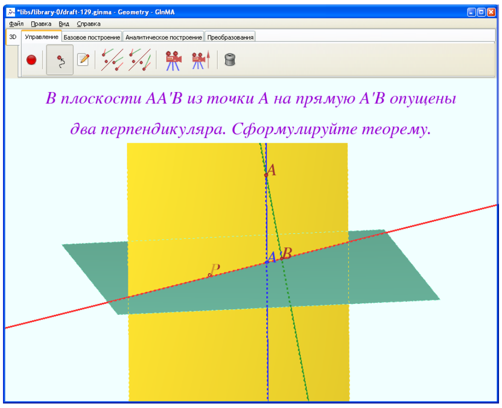
.

http://www.deoma-cmd.ru/

Материалы комплекта можно использовать на уроках в классе общеобразовательной школы. Комплект представляет решения задач, сопровождаемые интерактивными файлами, выполненными в программе GInMA. Решение стереометрических задач, исследование пространственных построений с помощью интерактивных файлов углубляет понимание геометрии, развивает пространственное воображение учащихся.

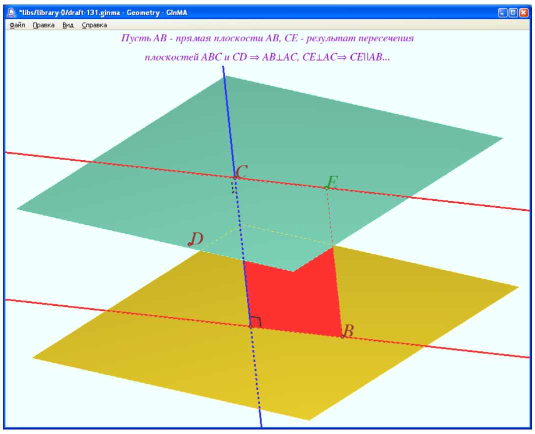


Признак перпендикулярности

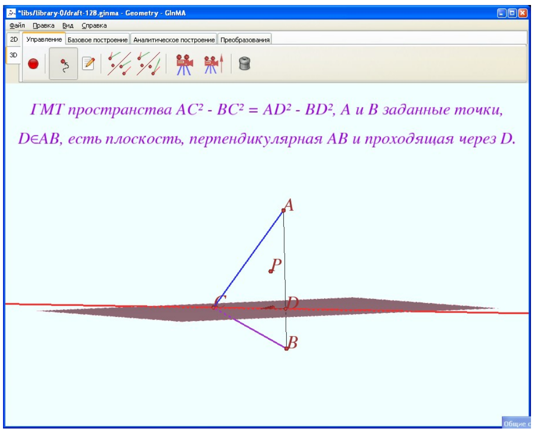


Единственность перпендикуляра

В комплекте выполнены интерактивные исследования понятия перпендикулярность, признаков перпендикулярности. Рассматриваются задачи на нахождение геометрического места точек, о серединном перпендикуляре. Приводятся доказательства теорем единственности перпендикуляра, о дух перпендикулярах. Решения задач сопровождаются методическими материалами по использованию интерактивных иллюстраций, выполненных в программе GInMA.



Плоскости, перпендикулярные одной прямой



ГМТ разность квадратов расстояний

Задача 1. Определение и признак перпендикулярности (пример обсуждения)

***Задание* [1, 1.4, Теорема 1.9].** Исследуйте признак перпендикулярности прямой и плоскости с использованием возможностей интерактивной геометрии.

Обсуждение. На рисунке показаны плоскость и перпендикулярная ей прямая, проходящая через точку A. Разворачивая изображение и рассматривая в проекции, когда плоскость вырождается в прямую, убеждаемся, что прямая выглядит перпендикулярной плоскости. Вспоминаем определение:

Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой этой плоскости.

На рисунке в плоскости проведена прямая AB. Вращая эту прямую и разворачивая изображение в направлении перпендикулярном прямой так, чтобы плоскость вырождалась в прямую, убеждаемся, что прямая выглядит перпендикулярной любой прямой плоскости, проходящей через точку A. Можно построить любую другую прямую плоскости, развернуть AB параллельно ей и обосновать перпендикулярность любой прямой плоскости. Поясняем, что данное определение пока не является обоснованным. Действительно, не понятно, существует ли вообще такая прямая. Кроме того, определение не может быть использовано на практике, так как надо проверять перпендикулярность исследуемой прямой и каждой прямой плоскости. Обосновываем необходимость поиска признака перпендикулярности.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум непараллельным прямым этой плоскости.

На рисунке в плоскости проведены две прямые AB и AC. Если признак верен, он обосновывает определение, так как прямую, перпендикулярную двум данным, можно построить – она находится на пересечении плоскостей, перпендикулярных этим прямым. Признак удобен для использования, так как он позволит доказывать перпендикулярность. Задача сведётся к проверке перпендикулярности только двум произвольно выбранным не параллельным прямым. Возникает естественный вопрос, как доказать признак, и что для этого требуется? Обсуждение проблемы завешается переходом на следующий шаг.

На рисунке проведен отрезок BC, на котором размещена точка D. На исследуемой прямой отмечена точка E. Проведена прямая AD. Важно, что если доказать, что $AD \perp AE$, то будет доказано, что прямая AE перпендикулярна любой прямой плоскости. Действительно, достаточно заменить точки B и (или) C на симметричные относительно A, чтобы точка D оказалась на отрезке, аналогичном BC.

Итак, достаточно доказать следующее.

Пусть прямая AE перпендикулярна ровно двум прямым проходящим через точку A, то есть $AB \perp AE$ и $AC \perp AE$, и точка D расположена на BC ($D \in BC$).

Тогда $AD \perp AE$, откуда следует, что AE перпендикулярна любой прямой плоскости.

Для доказательства на последнем рисунке выполнено дополнительное построение. Построена точка E', которая центрально симметрична точке E относительно точки A. Проведены равные пары отрезков $BE = BE'$ и $CE = CE'$ (в треугольниках BEE' и CEE' совпадают высота и медиана, то есть они равнобедренные. Отсюда следует, что $\Delta BCE = \Delta BCE'$ по трём сторонам). Точка D соединена с E и с E'. DE и DE' – это соответствующие линейные элементы равных треугольников, то есть $DE = DE'$. Значит, AD – медиана равнобедренного треугольника DEE', то есть $AD \perp AE$.

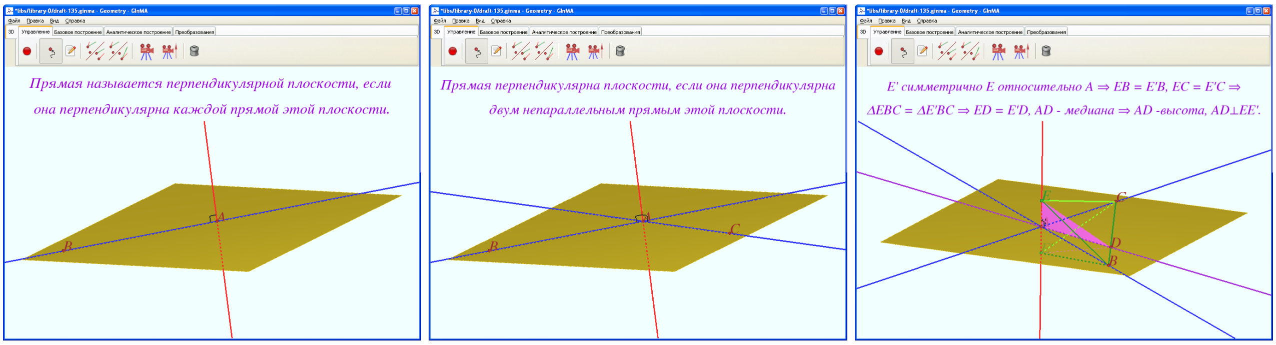


Рис. 1. Признак перпендикулярности

Задача 2. Плоскости, перпендикулярные одной прямой

Задача 2.1. Задание* [1, 1.4.1].** Пусть прямые ***AB и ***CD*** перпендикулярны прямой ***AC***. Верно ли, что прямые ***AB*** и ***CD*** параллельны?

Решение. Разворачивая изображение и рассматривая в проекции, когда ***AC*** вырождается в точку, убеждаемся, что утверждение не верно. Объясняем, что для опровержения утверждения в математике достаточно привести ровно один контрпример. Например, рассмотрите случай, когда ***CD⊥AB***.

Задача 2.2. Задание* [1, 1.4.2].** Пусть плоскости ***AB и ***CD*** перпендикулярны прямой ***AC***. Верно ли, что плоскости ***AB*** и ***CD*** параллельны?

Исследование. Разворачивая изображение и рассматривая проекции, высказываем предположение, что утверждение верно. Значит, его необходимо доказать!

Решение. Пусть ***AB*** – прямая, лежащая в плоскости, обозначенной ***AB***. Обозначим ***CE*** – прямую, возникающую при пересечении плоскостей ***ABC*** и ***CD***. Любая прямая в плоскости ***AB*** перпендикулярна ***AC***, то есть ***AB⊥AC***. Любая прямая в плоскости ***CD*** перпендикулярна ***AC***, то есть ***CE⊥AC.*** Прямые ***AB*** и ***CE***. лежат в одной плоскости и перпендикулярны ***AC***, то есть ***CE***|| ***AC.*** Переместив прямую ***AB***, построим новую прямую в плоскости ***AB*** и новую параллельную ей прямую в плоскости ***CD***. По признаку параллельности двух плоскостей, плоскости ***AB*** и ***CD*** параллельны.

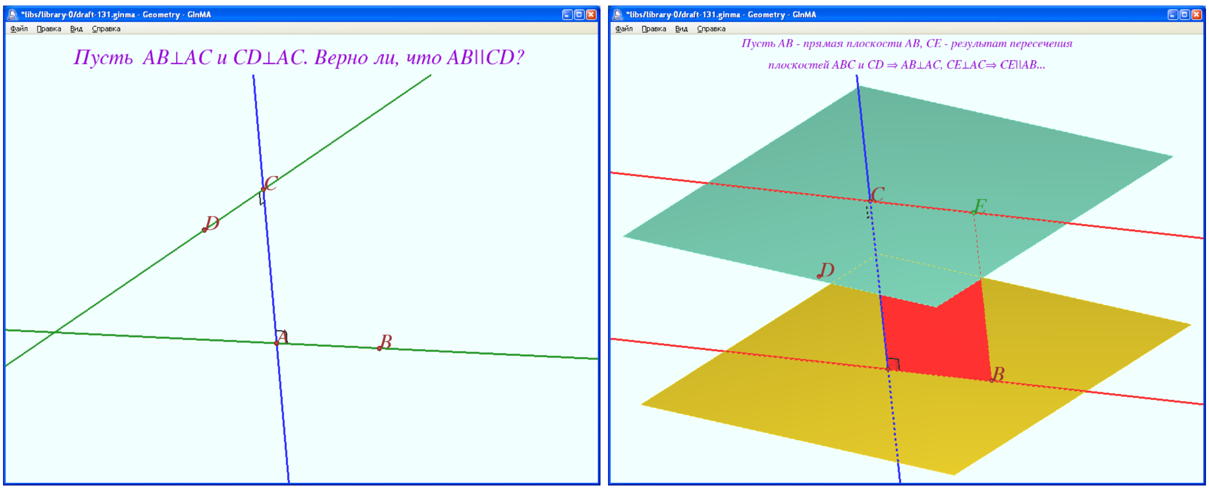


Рис. 2. Плоскости, перпендикулярные одной прямой

Задача 3. Единственность перпендикуляра

Задание* [1, 1.4, Теорема 1.10].** Докажите, что через данную точку ***A проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости ***P***.

Исследование. Разворачивая изображение и рассматривая его, высказываем предположение, что утверждение похоже на истину. Его надо доказывать. Как?

Доказательство. Применим метод «от противного». Допустим обратное, то есть допустим, что через ***A*** проходят, по крайней мере, две разные прямые ***AB*** и ***AA′***, перпендикулярные ***P***. Найдём противоречие, которое и докажет утверждение. Вспомним важное положение стереометрии о том, что в любой плоскости выполняются утверждения планиметрии. Будем искать противоречие в некоторой плоскости. На рисунке построена плоскость, содержащая оба перпендикуляра. Противоречие возникает именно в этой плоскости. *В плоскости AA'B из точки A на прямую A'B опущены два перпендикуляра, что невозможно.*

Полезно выяснить – все ли случаи расположения точки ***A*** рассмотрены. Особый случай – точка ***A*** лежит в плоскости ***P***. Его нужно исследовать отдельно. Выполнив это, получаем общую теорему.

Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

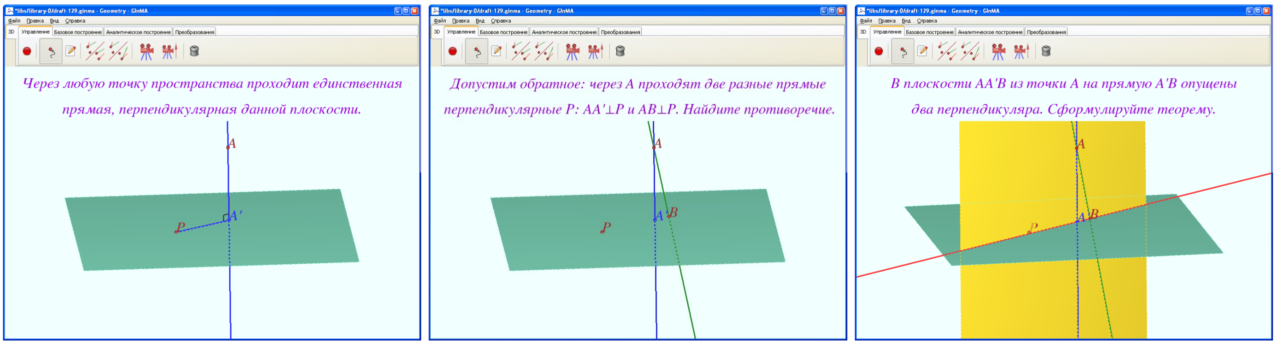


Рис. 3. Единственность перпендикуляра

Задача 4. Перпендикулярность прямых и сумма квадратов

Задача 4.1. Задание* [1, 1.4.15].** Пусть ***A,B,C и ***D*** – различные точки пространства. Докажите эквивалентность условий $AC \perp BD$ и $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Конкретизация условия. Докажите, что $AB \perp CD$ тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$.

Доказательство. Докажем, что если $AB \perp CD$, то $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$. Строим $AE \perp CD$ $\Rightarrow ABE \perp CD$, $BE \perp CD \Rightarrow$ $BC^2 + AD^2 = AE^2 + DE^2 + BE^2 + CE^2 = AC^2 + BD^2$.

Докажем, что если $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$, то $AB \perp CD$. Пусть $AE \perp CD$, $BE' \perp CD$. $DE^2 - CE^2 = AD^2 - AC^2 = BD^2 - BC^2 = DE'^2 - CE'^2$. $CD = CE + DE \Rightarrow E = E' \Rightarrow ABE \perp CD \Rightarrow AB \perp CD$.

Задача 4.2. Задание* [1, 1.4.14].** В пирамиде ***ABCD даны рёбра $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Найдите ***AD***, если известно, что $AC \perp BD$.

Решение. $AD^2 = AB^2 + CD^2 - BC^2$.

Задача 4.3. Задание. В пирамиде ***ABCD*** $AD^2 = AB^2 + BD^2$, $CD^2 = BC^2 + BD^2$. Докажите, что $BD \perp ABC$.

Доказательство. Известно, что $AB \perp CD$ тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$. Угол ***ABD*** прямой, так как $AD^2 = AB^2 + BD^2$ и $BD \perp AB$. Угол ***BCD*** прямой, так как $CD^2 = BC^2 + BD^2$ и $BD \perp BC$. Значит, прямая ***BD*** перпендикулярна двум прямым в плоскости ***ABC*** и перпендикулярна плоскости ***ABC***.

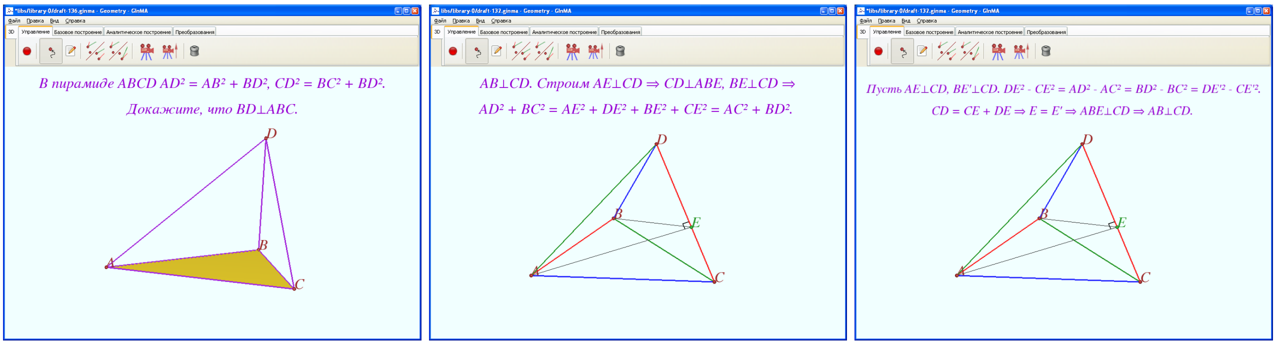


Рис. 4. Перпендикулярность прямых и сумма квадратов

Задача 5. Срединный перпендикуляр в пространстве

Задание. Докажите, что геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек ***A*** и ***B***, это плоскость, проходящая через середину ***AB*** перпендикулярно ***AB***.

Как известно, геометрическое место точек – это совокупность ***всех*** точек, обладающих некоторым свойством. Значит, в ходе решения требуется знать из условия (или найти любым способом), где могут находиться точки, обладающие свойством. Далее нужно обосновать два факта:

– доказать что каждая точка найденного множества обладает свойством;

– доказать, что никакая другая точка этим свойством не обладает.

Доказательство. Пусть точка ***C*** принадлежит плоскости, проходящей через середину ***AB*** перпендикулярно ***AB***, ***D*** – середина ***AB***. Тогда ***CD*** перпендикулярно ***AB***, $AD = BD$ и $AC = BC$. Доказано, что каждая точка ***C*** плоскости проходящей через середину ***AB*** перпендикулярно ***AB*** принадлежит искомому множеству.

Пусть $AC = BC$. Либо точка ***C*** совпадает с ***D***, либо треугольник ***ABC*** – равнобедренный, ***CD*** – его медиана, значит, ***CD*** – его высота, $CD \perp AB$, ***C*** обязательно принадлежит плоскости проходящей через середину ***AB*** перпендикулярно ***AB***. Доказано, что никакая другая точка этим свойством не обладает.

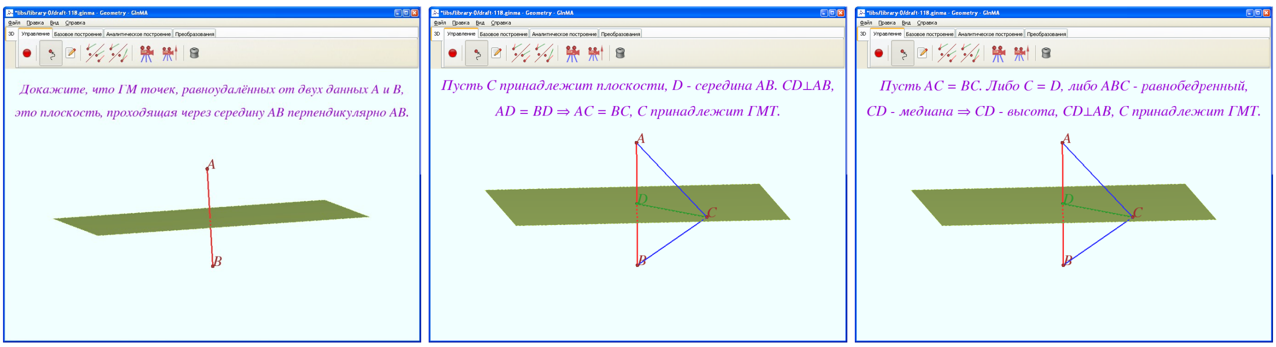


Рис. 5. Срединный перпендикуляр в пространстве

Задача 6. Множество точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек - постоянная величина

Задание. Найдите геометрическое место точек ***C*** пространства таких, что разность квадратов расстояний до двух заданных точек есть постоянная величина.

Обсуждение условия. На рисунке показан треугольник ***ABC***. На прямой ***AB*** находится точка ***D***. Требуется найти геометрическое место точек ***C*** пространства таких, что разность квадратов расстояний до двух заданных точек ***A*** и ***B*** есть постоянная величина. Эта величина определяется точкой ***D***: $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.

Конкретизация условия. Найдите геометрическое место точек ***C*** таких, что: $AC^2 - BC^2 = d$, где ***d*** задаёт точка $D \in AB$, $d = AD^2 - BD^2$.

Исследование. Начните исследование для самых простых случаев. Во–первых, в плоскости, а не в пространстве, а во–вторых, для удобных положений точки ***D***. В этих случаях искомое множество точек – это прямая, перпендикулярная ***AB*** и проходящая через ***D***. Далее проведите исследование искомого ГМТ в произвольной плоскости, содержащей прямую ***AB.*** Рассмотрите случаи, когда ***D*** – середина ***AB***, $D = A$ или $D = B$.

Продолжаем исследование. На рисунке показан вектор, лежащий в плоскости ***ABP*** и перпендикулярный ***AB***. В правой части рисунка размещена шкала, на которой указано отношение $k = (AC^2 - BC^2)/(AD^2 - BD^2)$. Полезно вспомнить теорему Пифагора и обсудить целесообразность её использования. Желательно провести рассмотрение как в простом случае, когда ***AB*** и нормальный вектор очевидно перпендикулярны, так и в случае, когда перпендикуляр выглядит наклонной. Рассмотрите произвольные положения точки ***C***.

Допустим, что $CD \perp AB$. Тогда по теореме Пифагора находим, что $AC^2 - AD^2 = CD^2$ и $BC^2 - BD^2 = CD^2$, то есть $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$. Значит, все точки плоскости ***ABP***, лежащие на перпендикуляре ***CD***, удовлетворяют условию.

Переходим в пространство. Полезно рассмотреть вид, близкий к направлению ***AB*** и, пользуясь точкой ***P***, вращать плоскость ***ABP.*** Точки прямых перейдут в точки плоскости, перпендикулярной ***AB*** и проходящей через ***D***. Значит, все точки плоскости перпендикулярной ***AB*** и проходящей через ***D***, удовлетворяют условию.

Доказательство. Пусть $CD \perp AB$. Тогда $AC^2 - AD^2 = CD^2$, $BC^2 - BD^2 = CD^2$. Значит, любая точка перпендикуляра ***CD*** удовлетворяет условию. Значит, все точки плоскости перпендикулярной ***AB*** и проходящей через ***D***, удовлетворяют условию. Объединение всех перпендикуляров ***CD*** – это плоскость, перпендикулярная ***AB*** и проходящая через ***D***.

Пусть ***CD*** - не перпендикулярна ***AB***. Точка ***C*** вне найденной плоскости. Её проекция на ***AB*** точка ***M*** не совпадает с ***D***, что следует из единственности перпендикуляра, опущенного в плоскости из заданной точки на заданную прямую. В этом случае

$$AC^2 - BC^2 = AM^2 - BM^2 \neq AD^2 - BD^2.$$

Итак, обосновано, что все точки плоскости, перпендикулярной ***AB*** и проходящей через ***D*** свойством $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ обладают и никакие другие точки этим свойством не обладают. Значит, *ГМТ пространства $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$, **A** и **B** заданные точки, $D \in AB$, есть плоскость, перпендикулярная **AB** и проходящая через **D**.*

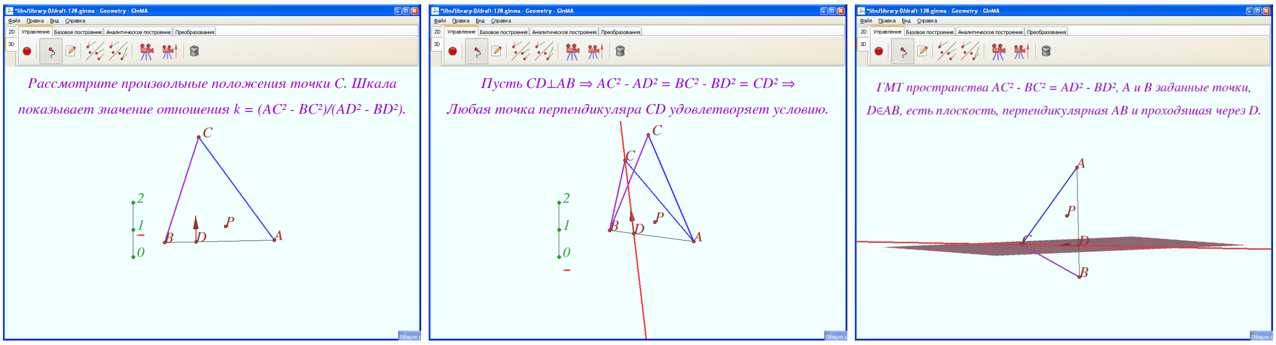


Рис. 6. ГМТ разность квадратов расстояний

Задача 7. Перпендикуляр, как расстояние между точкой плоскостью

Общее определение. Расстоянием между телами A и B называют наименьшее расстояние между точками тела A и точками тела B.

Конкретное определение. Расстояние между точкой A и фигурой P – это наименьшее расстояние между точкой A и точками фигуры P.

Частное определение. Расстояние между точкой A и плоскостью P – это наименьшее расстояние между точкой A и точками плоскости P.

Исследование. На уроке стоит обсудить понятие расстояния между фигурами или телами – например, как определить расстояние между соседними партами, почему расстоянием принято считать наименьшее расстояние между точками, принадлежащими фигурам, телам.

На интерактивном рисунке даны точка A, плоскость P и точка B, принадлежащая плоскости P. Показана шкала, на которой отмечено отношение минимального расстояния от A до плоскости к расстоянию от A до выбранной точки B. Это отношение не больше, чем единица. Перемещая точку B, стремимся к тому, чтобы на шкале получить единицу. Обсуждаем, как найти ту точку плоскости, которая ближе всего к точке A, и, соответственно, расстояние до плоскости.

На рисунке на втором шаге показана прямая AA', перпендикулярная плоскости P. Основание перпендикуляра точку A' называют проекцией (нормальной) точки A на плоскость P.

Высказано утверждение: ***Расстояние от точки до плоскости равно длине отрезка, соединяющего точку и её проекцию на плоскость.***

Проверяем утверждение, перемещая точку B в положение A' и меняя положение точки A. Обсуждаем вопрос – что надо доказать, чтобы утверждение оказалось верным? Приходим к выводу, что надо доказать неравенство $AA' \leq AB$.

***Задание* [1, 1.4, Теорема 1.11].** Докажите, что расстояние от точки до плоскости равно длине отрезка, соединяющего точку и её проекцию на плоскость.

Доказательство. Пусть A' – это проекция A на плоскость P. Угол $\angle AA'B$ прямой. Значит, AA' это катет, а AB – гипотенуза прямоугольного треугольника $AA'B$ и $AA' \leq AB$.

Задача 9. Теорема о двух перпендикулярах

Исследование. На рисунке показаны прямые AA' и CC', перпендикулярные плоскости P. Рассматривая конфигурацию с разных направлений, высказываем предположение о параллельности прямых: ***две различные прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.*** Обсуждаем, что и как нужно доказывать, чтобы обосновать утверждение. Желательно напомнить учащимся, что через данную точку к данной плоскости можно провести единственный перпендикуляр. Вспоминаем идею доказательства от противного.

***Задание* [1, 1.4, Теорема 1.12].** Докажите, что две различные прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.

Доказательство. Предположим противное. Пусть прямые AA' и CC' перпендикулярны плоскости P, прямая $CD \| AA'$ и эта *прямая CD не совпадает с CC'*. Пусть прямая L принадлежит плоскости P. Тогда $AA' \perp L$ и $CC' \perp L$. Из условия $CD \| AA'$ следует, что $CD \perp L$. Поскольку L - произвольная прямая плоскости P, то $CD \perp P$, но перпендикуляр из C к плоскости P единственный, значит, *CC' совпадает с CD*. Противоречие.

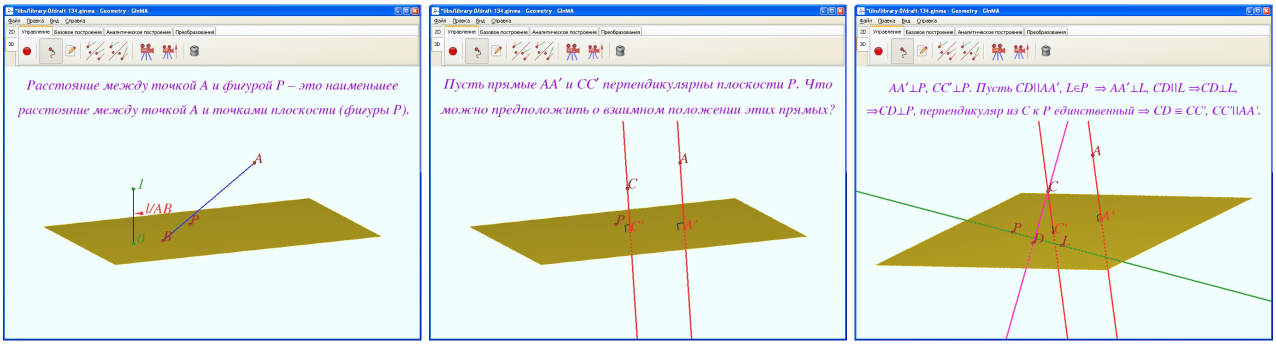


Рис. 7. Теорема о двух перпендикулярах

Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. 10 – 11 кл.: Учебник. –М.: Дрофа, 2007. – 206 с.

2. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 10. –М.: МФТИ, 1996. – 256 с.

3. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 11. –М.: Физматкнига, 2005. – 336 с.

4. Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: –Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. –М.: Изд. МЦНМО. 2006. – 256 с.

5. В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. –М.: «НАУКА», 1989, Библиотека математического кружка, вып. 19. – 287 с.