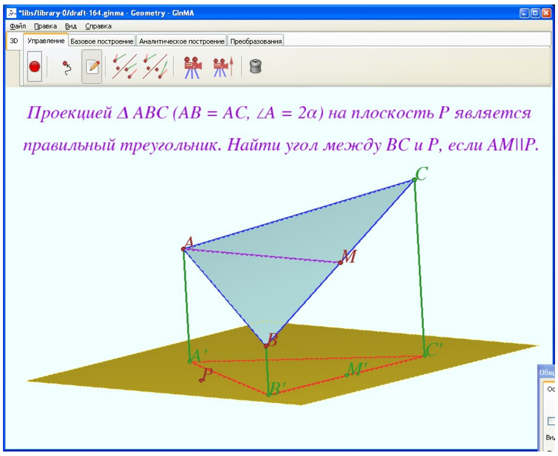
Проекции

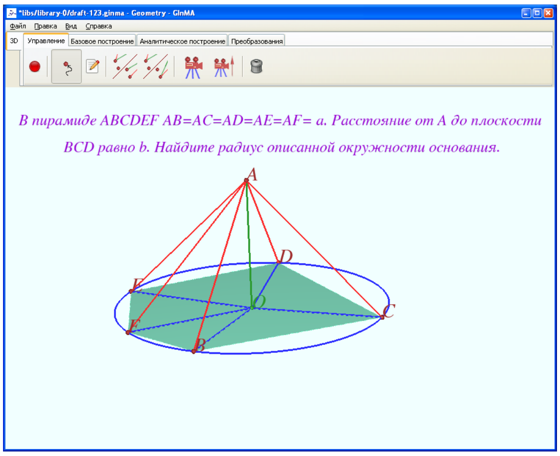
Интерактивные решения задач о нормальной и параллельной проекции, равных наклонных; на построение, нахождение углов и расстояний в фигурах.

http://www.deoma–cmd.ru/

Материалы комплекта можно использовать на уроках в классе общеобразовательной школы. Комплект представляет решения задач, сопровождаемые интерактивными файлами, выполненными в программе GInMA. Решение стереометрических задач, исследование пространственных построений с помощью интерактивных файлов углубляет понимание геометрии, развивает пространственное воображение учащихся.

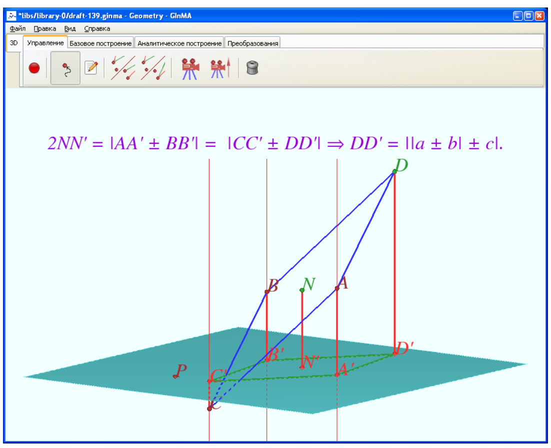


Правильный треугольник, как проекция

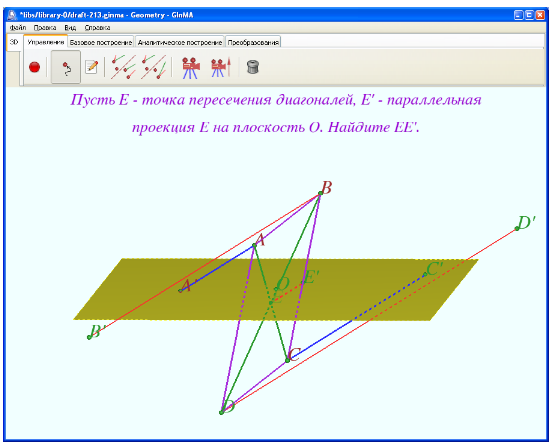


Свойство равных наклонных

В комплекте выполнены интерактивные исследования свойств проекции, различных видов проекций: нормальной, параллельной; свойств равных наклонных, понятия «расстояние». Приведены решения задач на построение, нахождение углов и расстояний в фигурах. Решения задач сопровождаются методическими материалами по использованию интерактивных иллюстраций, выполненных в программе GInMA.



Проекция точек фигур



Проектирование параллелограмма

Перпендикуляр, как расстояние между точкой плоскостью

Общее определение. Расстоянием между телами ***A*** и ***B*** называют наименьшее расстояние между точками тела ***A*** и точками тела ***B.***

Конкретное определение. Расстояние между точкой ***A*** и фигурой ***P*** – это наименьшее расстояние между точкой ***A*** и точками фигуры ***P.***

Частное определение. Расстояние между точкой ***A*** и плоскостью ***P*** – это наименьшее расстояние между точкой ***A*** и точками плоскости ***P.***

Исследование. На уроке стоит обсудить понятие расстояния между фигурами или телами. Например, как определить расстояние между соседними партами, почему расстоянием принято считать наименьшее расстояние между точками, принадлежащими этим фигурам или телам. На интерактивном рисунке даны точка ***A***, плоскость ***P*** и точка ***B***, принадлежащая плоскости ***P***. Показана шкала, на которой отмечено отношение минимального расстояния от ***A*** до плоскости к расстоянию от ***A*** до выбранной точки ***B***. Это отношение не больше, чем единица. Перемещая точку ***B,*** стремимся к тому, чтобы на шкале получить единицу. Обсуждаем, как найти ту точку плоскости, которая ближе всего к точке ***A***, и, соответственно, расстояние до плоскости. На очередном рисунке показана прямая ***AA′,*** перпендикулярная плоскости ***P***. Основание перпендикуляра точку ***A′*** называют проекцией (нормальной) точки ***A*** на плоскость ***P***.

Утверждение: Расстояние от точки до плоскости равно длине отрезка, соединяющего точку и её проекцию на плоскость. Проверяем утверждение, перемещая точку ***B*** в положение ***A′***, и меняя положение точки ***A***. Обсуждаем вопрос – что надо доказать, чтобы утверждение оказалось верным? Приходим к выводу, что надо доказать неравенство $AA' \le AB$.

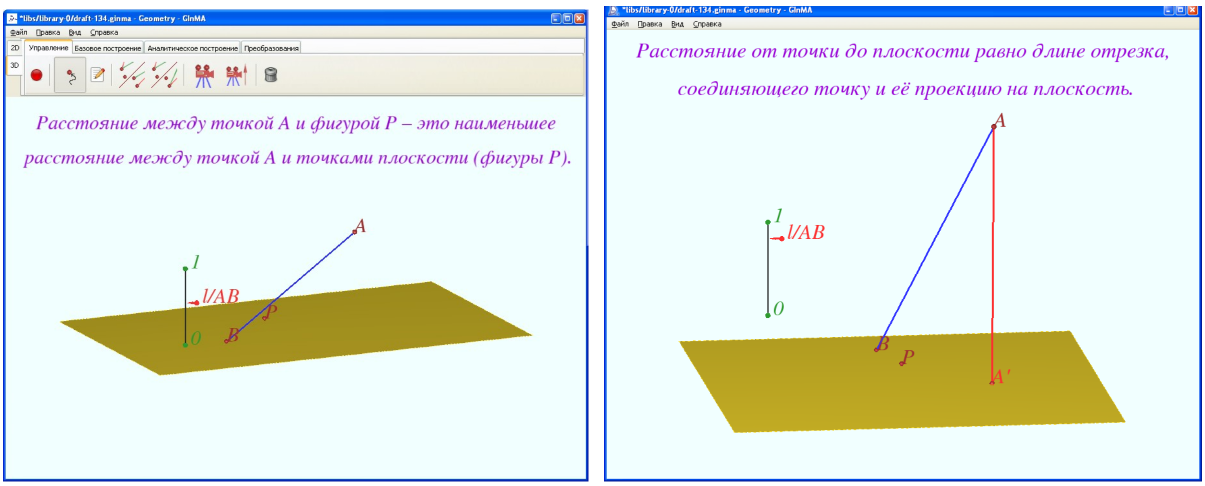


Рис. 1. Расстояние между точкой и фигурой

***Задание* [1, 1.4, Теорема 1.11].** Докажите, что расстояние от точки до плоскости равно длине отрезка, соединяющего точку и её проекцию на плоскость.

Доказательство. Пусть A' – это проекция ***A*** на плоскость ***P***. Угол $\angle AA'B$ прямой. Значит, AA' это катет, а AB – гипотенуза прямоугольного треугольника $AA'B$ и $AA' \le AB$.

Теорема о двух перпендикулярах

Исследование. На рисунке показаны прямые ***AA'*** и ***CC'***, перпендикулярные плоскости ***P***. Рассматривая конфигурацию с разных направлений, высказываем предположение о параллельности прямых: ***две различные прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.*** Обсуждаем, что и как нужно доказывать, чтобы обосновать утверждение. Желательно напомнить учащимся, что через данную точку к данной плоскости можно провести единственный перпендикуляр. Вспоминаем идею доказательства от противного.

***Задание* [1, 1.4, Теорема 1.12].** Докажите, что две различные прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.

Доказательство. Предположим противное. Пусть прямые ***AA'*** и ***CC'*** перпендикулярны плоскости ***P***, прямая ***CD||AA'*** и эта прямая ***CD*** не совпадает с ***CC'***. Пусть прямая ***L*** принадлежит плоскости ***P***. Тогда ***AA'⊥L*** и ***CC'⊥L***. Из условия ***CD||AA'*** следует, что ***CD⊥L***. Поскольку ***L*** произвольная прямая плоскости ***P,*** то ***CD⊥P***, но перпендикуляр из ***C*** к плоскости ***P*** единственный, значит, ***CC'*** совпадает с ***CD***. Противоречие.

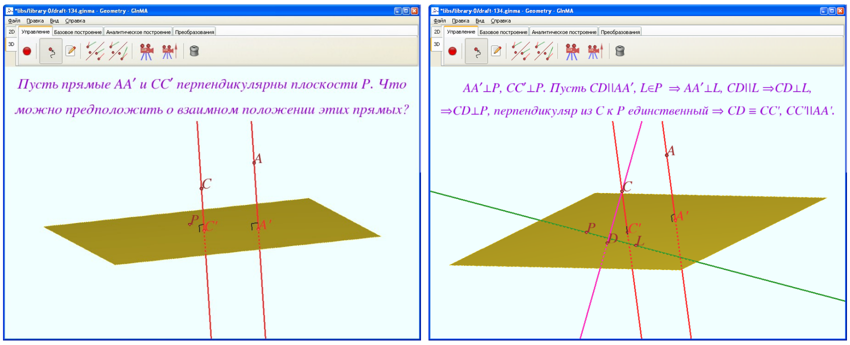


Рис.2. Теорема о двух перпендикулярах

Определение проекции и её свойства

Определение* [1, 1.4, определение 1.7].** Проекцией (ортогональной) точки ***A на плоскость ***P*** называют точку пересечения прямой, проходящей через ***A*** перпендикулярно ***P*** с плоскостью ***P***.

Определение* [1, 1.4, определение 1.8].** Проекцией (ортогональной) фигуры ***Ф на плоскость ***P*** называют фигуру ***Ф'*** этой плоскости, образованную проекциями всех точек ***Ф***.

Исследование. На рисунке показаны точка ***A*** и плоскость ***P***. Стоит обсудить понятие проектирования (проецирования), вспомнить кино и лампу (центральная проекция), солнечный и лунный свет (параллельная проекция), сухие зоны под крышей при дожде в безветренную погоду (ортогональная или перпендикулярная проекция). Каждый вид проектирования имеет свои свойства, мы начинаем с самого простого – ортогонального проектирования (или проецирования), которое даже не принято специально оговаривать. На рисунке прямая ***AA'*** перпендикулярна плоскости ***P***. Важно отметить, что проекция любой точки всегда существует (для любой точки можно найти её проекцию на плоскость), и эта проекция всегда единственная (теорема о единственности перпендикуляра).

Выполняем обобщение, переходя от точки к фигуре, состоящей из множества точек. Обсудите, что такое проекция отрезка, всегда ли это – отрезок, должны ли быть все точки ***Ф*** в одной полуплоскости плоскости ***P***. Покажите, когда проекция отрезка – это точка, когда проекция совпадает с оригиналом, когда равна оригиналу, когда при проектировании объект изменяется неузнаваемо (плоскость фигуры перпендикулярна плоскости ***P***). На рисунке фигура в виде треугольника ***ABC***, проекция этой фигуры ***A'B'C'***, прямые ***AA', BB', CC'***, плоскость ***P***. Переходя к исследованию свойств проектирования, целесообразно обратить внимание учеников на то, как искажаются при проектировании углы или отношение длин отрезков, не лежащих на прямой. Удобно пользоваться видом вдоль прямых и видом под 40° – 60° градусов к этому направлению.

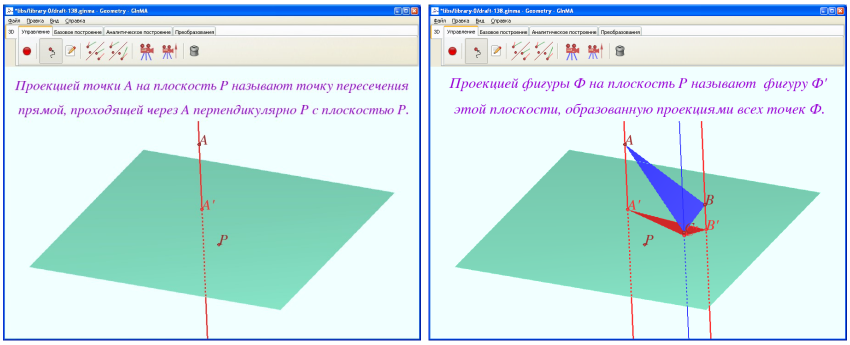


Рис.3. Изучение определения проекции

Основное свойство проекции

Теорема* [1, 1.4, теорема 1.13]**. Пусть точка ***D лежит на отрезке ***AB***, причём ***AD : BD = k***, ***A', B'*** и ***D'*** – проекции ***A, B*** и ***D*** на плоскость ***P***. Тогда точка ***D'*** расположена на отрезке ***A'B'***, причём ***A'D' : B'D' = k***.

Исследование. На рисунке показан отрезок ***AB*** с расположенной на нём точкой ***D***. Пусть ***AD : BD = k***. Что можно предположить о взаимном расположении точек ***A', B', D'***? Разворачивая изображение так, чтобы параллельные прямые сливались, стоит подвести учеников к предположению, что точки ***A', B', D'*** лежат на одной прямой. Полезно вспомнить о свойствах параллельных прямых и теореме Фалеса и вывести учеников на идею о параллельных отрезках. Прочитав формулировку основной теоремы о проекциях, обсудите схему доказательства на основе теорем планиметрии. Идея доказательства – переход во вспомогательную плоскость и использование в ней теоремы Фалеса.

Доказательство. По условию, ***A', B'*** и ***D'*** – проекции ***A, B*** и ***D*** на плоскость ***P***. Значит, ***AA'⊥P, BB'⊥P, DD'⊥P.*** По теореме о параллельности перпендикуляров к плоскости, ***AA'||BB'|| DD'***. По теореме о параллельных прямых, ***AA', BB'*** и ***DD'*** лежат в одной плоскости, а значит, точки ***A', B'*** и ***D'*** принадлежат одной прямой, являющейся пересечением плоскости ***P*** и плоскости ***ABD'.*** Пользуясь в плоскости ***ABD'*** теоремой Фалеса, найдем, что точка ***D'*** расположена на отрезке ***A'B',*** причём ***A'D' : B'D' = k***.

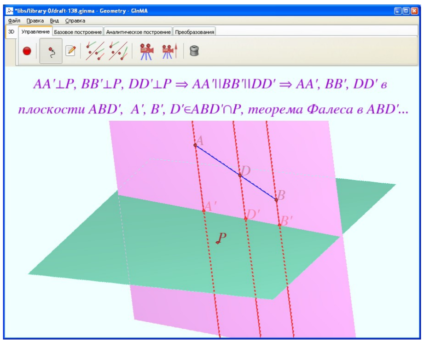


Рис.4. Основное свойство проекции

Задача 1. Расстояние от точки до её проекции

Задание. Пусть $A'B$ – проекция AB на плоскость P ($B \in P$). Найдите расстояние от A до плоскости P, если $AB = L$, $A'B = l$.

Решение. $\angle AA'B = 90°$. По теореме Пифагора находим: $AA'^2 = AB^2 - A'B^2 = L^2 - l^2$.

Задание. Пусть $A'B$ и $A'C$ – проекции AB и AC на плоскость P. Найдите расстояние от A до P, если $AB = L$, $AC = l$, $k\,A'C = A'B$.

Решение. $\angle AA'B = \angle AA'C = 90°$ По теореме Пифагора, находим: $k^2(l^2 - AA'^2) = L^2 - AA'^2$.

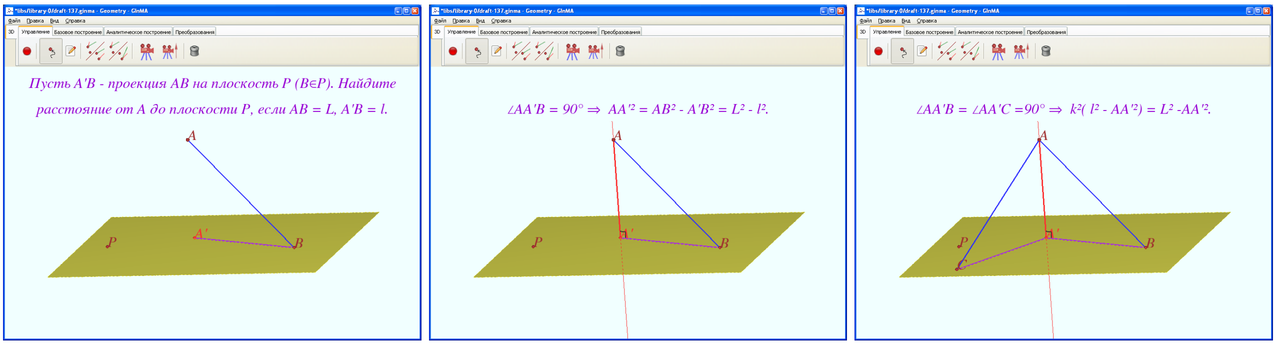


Рис.5. Расстояние от точки до её проекции

Задача 2. Проекция точек, расположенных на фигурах

Задание **[1, 1.4.8]**. Расстояния от A и B до плоскости P равны a и b. N – середина AB. Найдите расстояние от N до P.

Исследование. На рисунке – точки A и B, расположенные по одну сторону от плоскости P, отмечена середина отрезка N и построены проекции A', B' и N'. Целесообразно вспомнить свойства проецирующих прямых: параллельность, расположение параллельных прямых, пересекающих одну прямую, в одной плоскости, и свойства средней линии трапеции в плоскости. Можно задуматься о том, можно ли обозначить плоскость, содержащую прямые, как ABN? После записи решения, важно задаться вопросом – единственно ли найденное решение? В каких случаях оно единственно? После некоторого обсуждения, когда ученики подвигают точки A и B, они догадаются, что существенно изменяется ситуация, если точки располагаются по разные стороны от плоскости. Показанное дополнительное построение выполнено для случая, когда точка B уходит «под плоскость».

Решение. Пусть точки A и B находятся с одной стороны от плоскости P. Из перпендикулярности плоскости проектирующих прямых следует их параллельность: $AA' \perp P$, $BB' \perp P$, $NN' \perp P \Rightarrow AA' \| BB' \| NN'$. Средняя линия NN' трапеции $ABB'A'$ равна полусумме расстояний $NN' = (a + b)/2$.

Пусть точки A и B находятся по разные стороны от плоскости P, $A''A = N''N = BB' = b$. $N''N' = A''A/2 = (b + a)/2$, $NN' = |N''N' - N''N| = |a - b|/2$.

Задание **[1, 1.4.9]**. Расстояния от A, B и C до плоскости P равны a, b и c. M – центроид треугольника ABC (точка пересечения медиан). Найдите расстояние от M до P.

Решение. Известно, что $NN' = |a \pm b|/2$ и $CM = 2NM$. Отсюда $3MM' = AA' + BB' + CC'$. Рассматривая различные взаимные положения точек относительно плоскости, находим ответ.

$$CM = 2NM \Rightarrow C'M' = 2N'M' \Rightarrow MM' = |a \pm b \pm c|/3.$$

Задание* [1, 1.4.11]**. Расстояния от ***A, B и ***C*** до плоскости ***P*** равны ***a, b*** и ***c***. ***ACBD*** – параллелограмм. Найдите расстояние от ***D*** до ***P***.

Решение. Известно, что точка пересечения диагоналей равноудалена от противолежащих вершин. Значит, ***NN'*** равно либо полусумме, либо полуразности расстояний до плоскости ***P*** от пар противолежащих вершин:

$$2NN' = |AA' \pm BB'| = |CC' \pm DD'| \Rightarrow DD' = ||a \pm b| \pm c|.$$

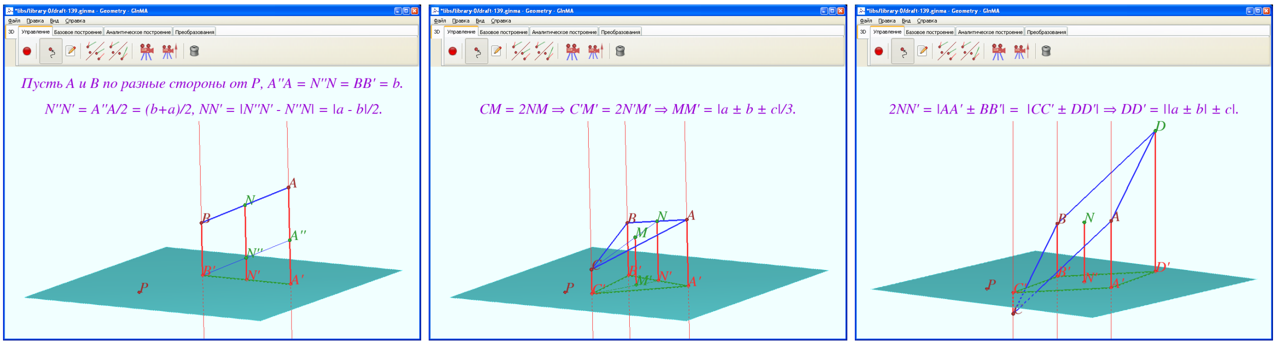


Рис. 6. Проекция точек, расположенных на фигурах

Задача 3. Полезные проекции

Задача 3.1. Полезные проекции правильного тетраэдра

Задание. Представьте, затем рассмотрите проекцию правильного тетраэдра на плоскость:

– перпендикулярную ребру;

– параллельную паре скрещивающихся рёбер.

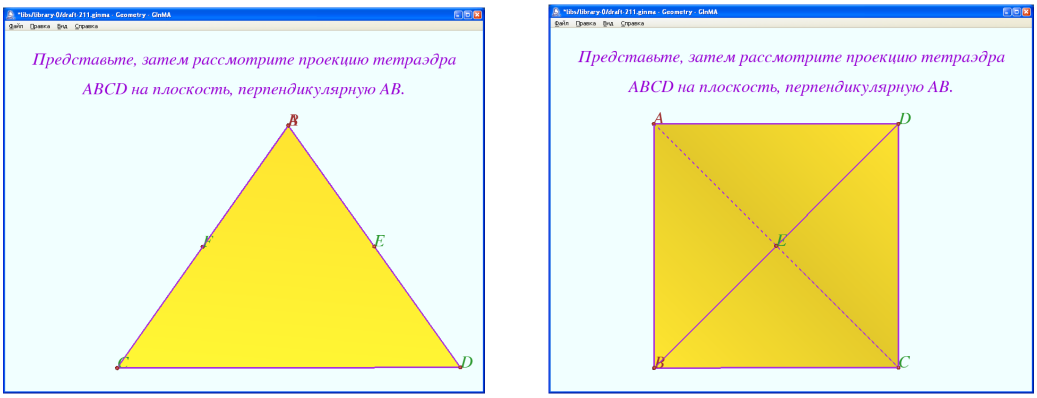


Рис.7. Полезные проекции правильного тетраэдра

Задача 3.2. Полезные проекции куба

Задание. Представьте, затем рассмотрите проекцию куба на плоскость:

– перпендикулярную ребру;

– перпендикулярную диагонали грани куба;

– перпендикулярную диагонали куба.

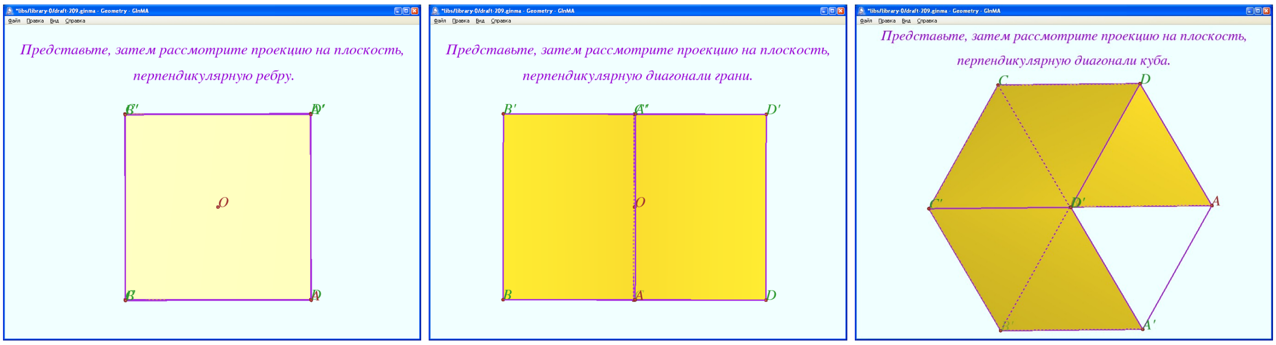


Рис.8. Полезные проекции куба

Задача 4. Правильный треугольник, как проекция

Задача 4.1. Правильный треугольник, как проекция равнобедренного треугольника

Задание. Проекцией равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$, $\angle A = 2\alpha$) на плоскость P является правильный треугольник. Найти угол между BC и P, если $AM \| P$.

Решение. Вычисляем длину проекции: $BM = AM\,tg\,\alpha$ $B'M' = A'M'\,tg30°$.

$$\cos\beta = \frac{B'M'}{BM} = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{3}}.$$

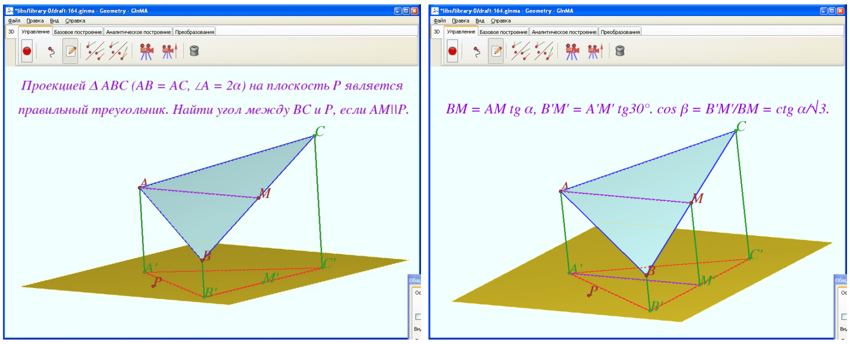


Рис.9. Правильный треугольник, как проекция равнобедренного треугольника

Задача 4.2. Правильный треугольник, как проекция произвольного треугольника

Задание. Найдите сторону правильного треугольника, который является проекцией данного треугольника ABC на плоскость, проходящую через точку A.

Исследование. На рисунке показаны исходный треугольник и правильный, полученный в результате проектирования. Проверяем утверждение задачи о возможности построения такого треугольника, произвольно изменяя исходный.

Решение. Пусть сторона искомого $\Delta AB'C'$ равна x, $BB' = y$, $CC' = z$. Составим систему уравнений, если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. $x^2 + y^2 = c^2$; $x^2 + z^2 = b^2$; $x^2 + (z - y)^2 = a^2$.

Уравнение преобразуем к виду $3x^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 0$.

Решение: $x^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \dfrac{2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - c^2b^2}}{3}$, $y^2 = c^2 - x^2$

Для того, чтобы построить треугольник, строим точку пересечения сферы с центром A и радиусом x, сферы с центром B и радиусом y и сферы с центром C и радиусом AC.

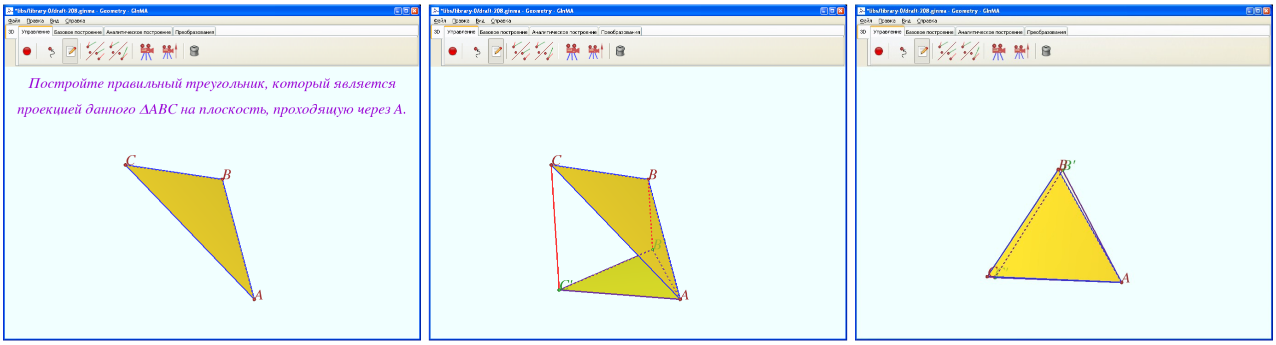


Рис. 10. Правильный треугольник, как проекция произвольного треугольника

Задача 5. Свойство равных наклонных

Задача 5.1. Задание. Пусть три наклонные из некоторой точки имеют равную длину. Сравните углы между наклонными и плоскостью. Найдите точку, в которую проектируется общая точка наклонных.

Конкретизируем условие. Даны плоскость ***P***, точка ***A*** вне плоскости ***P***. Из точки ***A*** проведены три наклонные равной длины ***AB = AC = AD***. Сравните углы между наклонными и плоскостью ***P***. Докажите, что точка ***O***, проекция ***A*** на плоскость ***P***, – это центр описанной окружности треугольника ***BCD.***

Решение. Прямоугольные треугольники ***ABO, ACO, ADO*** имеют равные гипотенузы и общий катет. Они равны, следовательно, равны их углы и вторые катеты.

Задача 5.2. Задание. Точка ***A*** равноудалена от вершин плоского многоугольника ***BCDEF***. Докажите, что этот многоугольник вписанный.

Решение. Аналогично предыдущему.

Задача 5.3. Задание. В пирамиде ***ABCDEF AB = AC = AD = AE = AF = a***. Расстояние от ***A*** до плоскости ***BCD*** равно ***b***. Найдите радиус описанной окружности основания.

Решение. Аналогично предыдущему. По теореме Пифагора $r^2 = a^2 - b^2$.

Задача 5.4. Задание. В плоскости ***P*** дан прямоугольный треугольник ***ABC***. Найдите расстояние от точки ***D*** до плоскости ***P***, если угол наклона ***AD***, ***BD*** и ***CD*** к ***P*** равен ***α*** и ***BC = 2a.***

Ответ. ***a tg α.***

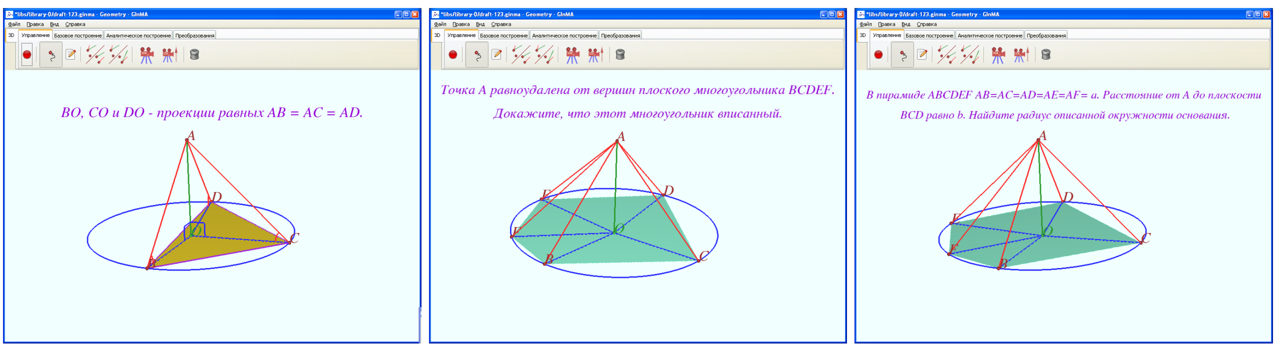


Рис.11. Свойство равных наклонных

Задача 6. Построение изображения правильного шестиугольника

Задание. Постройте изображение правильного шестиугольника, зная точки ***A,B,C*** – изображения трёх последовательных его вершин.

Решение. Известно, что центр правильного шестиугольника (***O***) симметричен любой вершине (***B***) относительно середины диагонали, соединяющей две соседние вершины (***A*** и ***C***). Середины отрезков переходят в середины проекций. Отсюда построение. Ищем последовательно ***B'*** середину отрезка ***AC***, центр ***O*** шестиугольника и три оставшиеся вершины (***AO = DO, BO = EO, CO = FO***).

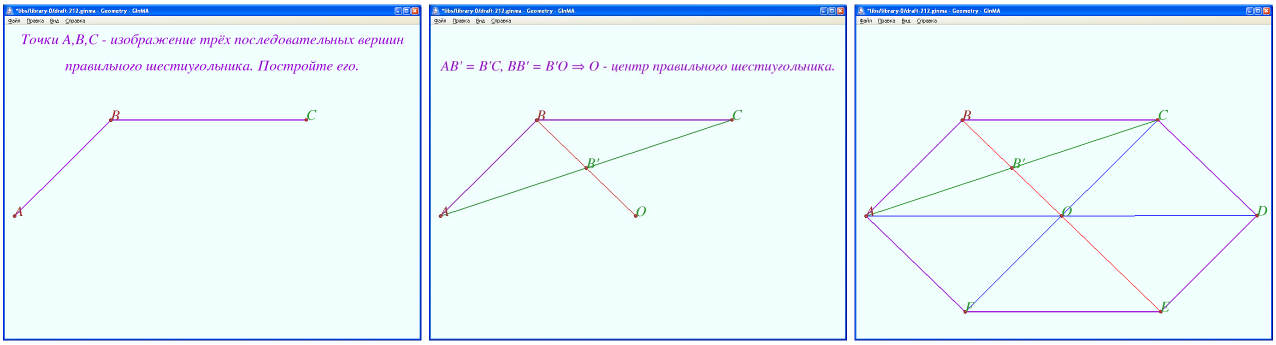


Рис.12. Построение изображения правильного шестиугольника

Параллельная проекция

Определение. Проекцией точки ***A*** на плоскость ***P*** в направлении ***BC*** называют точку пересечения с ***P*** прямой ***AA',*** параллельной ***BC***.

Исследование. На рисунке показаны точка ***A***, прямая ***BC*** и плоскость ***P***. Стоит обсудить понятие проектирования (проецирования), вспомнить кино и лампу (центральная проекция), солнечный и лунный свет (параллельная проекция). Каждый вид проектирования имеет свои свойства.

Задача 7. Проектирование параллелограмма

Задание. ***ABCD*** – параллелограмм, через вершины которого проходят параллельные прямые, пересекающие плоскость ***O*** в точках ***A',B',C'*** и ***D'***. Найдите ***DD'***, если ***AA' = a, BB' = b, CC' = c***.

Решение. Пусть ***E*** – точка пересечения диагоналей, ***E'*** – параллельная проекция ***E*** на плоскость ***O***. Если стороны параллелограмма не пересекают плоскость, то 2***EE' = AA' + CC' = BB' + DD'***. Иначе знаки могут меняться.

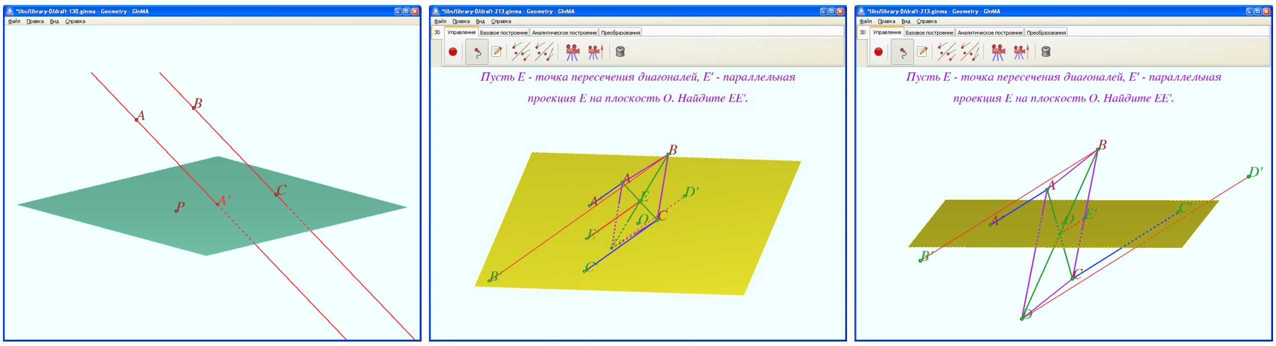


Рис.13. Проектирование параллелограмма

Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. 10 – 11 кл.: Учебник. –М.: Дрофа, 2007. – 206 с.

2. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 10. –М.: МФТИ, 1996. – 256 с.

3. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 11. –М.: Физматкнига, 2005. – 336 с.

4. Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: –Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. –М.: Изд. МЦНМО. 2006. – 256 с.

5. В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. –М.: «НАУКА», 1989, Библиотека математического кружка, вып. 19. – 287 с.