

Равногранный тетраэдр (Disphenoid)

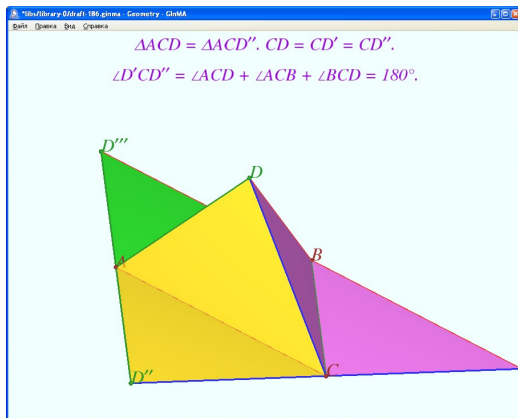
Интерактивные решения задач на построение и исследование свойств
равногранного тетраэдра и его сфер.

© С.Н. Носуля, В.В. Шеломовский. Тематические комплекты по геометрии, 2011.

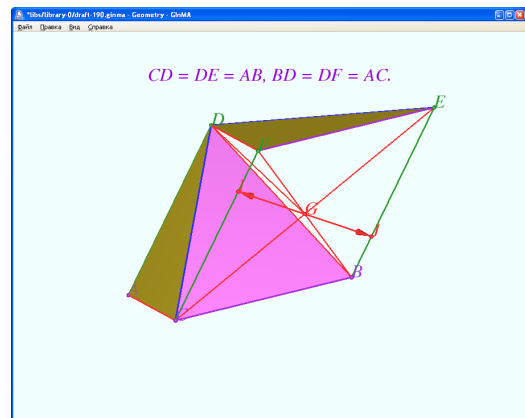
© Д.В. Шеломовский. Компьютерная программа GInMA, 2011.

<http://www.deoma-cmd.ru/>

Материалы комплекта можно использовать на уроках в классе с углубленным изучением математики, для создания учебного школьного проекта или исследования, представляемого на математический конкурс. Комплект представляет решения задач, сопровождаемые интерактивными файлами, выполненными в программе GInMA. Исследование пространственных построений с их помощью углубляет понимание геометрии, развивает пространственное воображение учащихся.

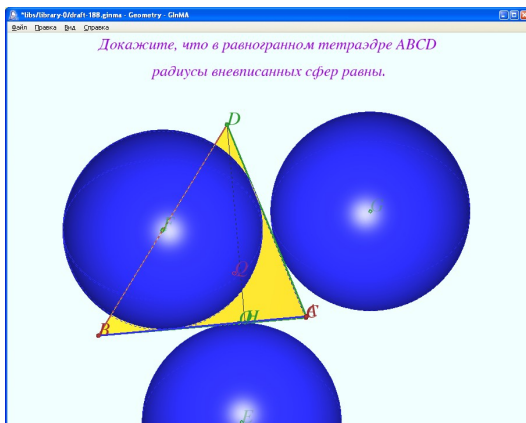


Свойства равногранного тетраэдра

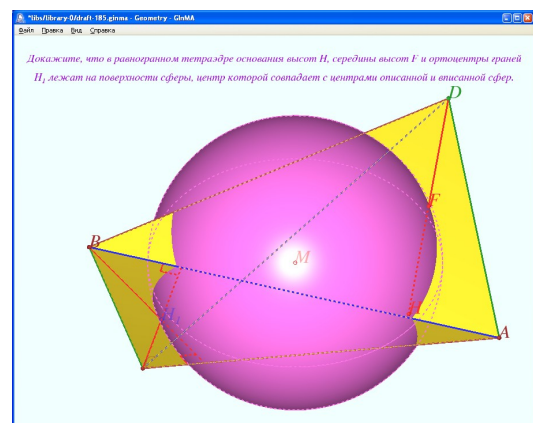


Тетраэдр с равновеликими гранями

В комплекте выполнены интерактивные исследования свойств равногранного тетраэдра и его сфер. Рассмотрены решения задач на построение равногранного тетраэдра, задач о тетраэдре, грани которого равновелики, о сфере 12 точек равногранного тетраэдра.



Свойства сфер равногранного тетраэдра



Сфера 12 точек равногранного тетраэдра

Тетраэдр называют равногранным, если все его грани – равные треугольники.

Задача 1. Построение равногранного тетраэдра

Задание [1,325]. Постройте равногранный тетраэдр $ABCD$, если задана грань ABC .

Решение: Развертка $A'B'C'$ равногранного тетраэдра $ABCD$ содержит четыре равных треугольника. Значит, AB , BC и AC – это средние линии $A'B'C'$. Известно, что в этом случае ортоцентр H треугольника $A'B'C'$ окажется основанием высоты тетраэдра (по теореме о трёх перпендикулярах). Вершина D удалена от A на расстояние BC , что позволяет построить тетраэдр, если условие $AH < BC$ выполнено.

По свойству прямой Эйлера, доказано, что основание высоты тетраэдра симметрично ортоцентру H' треугольника основания ABC относительно центра O окружности, описанной вокруг ABC . Если ортоцентр H_0 основания ABC равногранного тетраэдра $ABCD$ делит высоту AA_1 на отрезки $m = AH_0$ и $n = A_1H_0$, то высота DH равногранного тетраэдра удовлетворяет равенству $DH^2 = 4mn$. Действительно, высоты равных граней равны, $DE = A_1E = AA_2 = m + n$. Из подобия треугольника $A_1B_1C_1$ и треугольника ABC , $A_1H = 2AH_0 = 2m$. $HE = A_1E - A_1H = m - n$. По теореме Пифагора, $DH^2 = DE^2 - HE^2 = (m + n)^2 - (m - n)^2 = 4mn$.

Исследование: Выясните, для каких треугольников ABC нельзя построить равногранный тетраэдр. При этом расстояние от основания высоты H до вершин треугольника основания превышает длину соответствующих сторон (например, $AH \geq BC$).

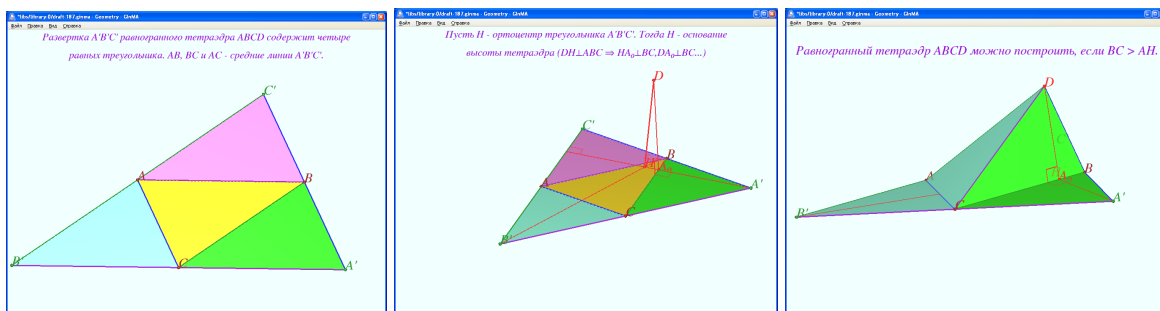


Рис 1. Построение равногранного тетраэдра

Задача 2. Свойства равногранного тетраэдра

Задание [1,321]. Докажите, что если тетраэдр обладает любым из указанных ниже свойств, то он равногранный.

1. Противоположные рёбра попарно равны.
2. Суммы плоских углов при трёх вершинах тетраэдра равны 180° .
3. Суммы плоских углов при двух вершинах тетраэдра равны 180° и какие-то два противоположащих ребра равны.
4. Сумма плоских углов при одной из вершин тетраэдра равна 180° и в нём существуют две пары равных противоположащих ребер.
5. В тетраэдре $ABCD$ выполняется равенство $\angle ABC = \angle ADC = \angle BAD = \angle BCD$.

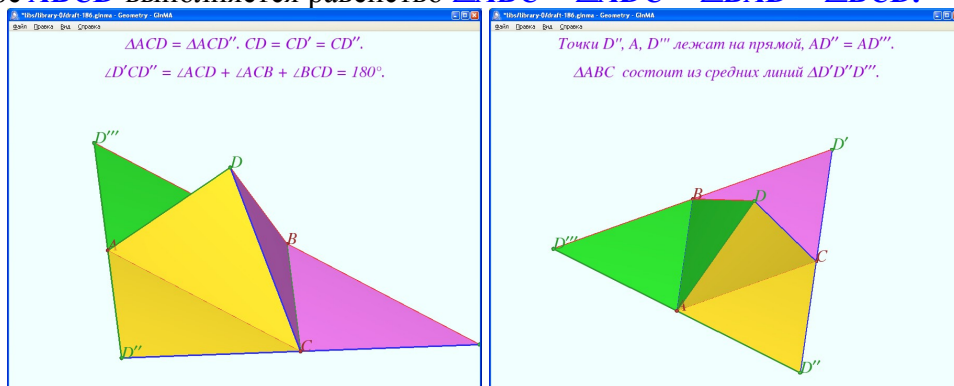


Рис 2. Суммы плоских углов при вершинах тетраэдра равны 180° .

Задача 3. Свойства тетраэдра, грани которого равновелики 321 5

Задание [1,321.5], [2, Гл.6,§7.3,2]. Докажите, что если в тетраэдре $ABCD$ равны площади всех граней, то он равногранный.

Решение: Строим призму $ABCDEF$, основанием которой является $\triangle ABC$. В ней $AD = BE = CF$, $AD \parallel BE \parallel CF$, $AB = DE$, $AC = DF$. Сравнив площади боковых граней четырёхугольной пирамиды $BCFED$, убеждаемся, что они равны:

$$S(\triangle CDF) = S(\triangle ACD) = S(\triangle ABC) = S(\triangle DEF) = S(\triangle ABD) = S(\triangle BDE) = S(\triangle BCD).$$

Пусть G - основание высоты пирамиды $BCFED$ $DG \perp BCFE$. Тогда расстояния от G до BE и CF (BC и EF) равны: $GI \perp FC$, значит, $DI \perp FC$; $GJ \perp BE \Rightarrow DJ \perp BE$; $FC = BE$; $S(\triangle CDF) = S(\triangle BDE) \Rightarrow DI = DJ \Rightarrow GI = GJ$. Следовательно, G - точка пересечения диагоналей четырёхугольника $BCFE$. $GE = GC$, $GB = GF$. Из равенства $CD = DE = AB$, $BD = DF = AC$. Достроив тетраэдр до призмы с гранью ABD в основании, получим аналогично $AD = BC$, $BCFE$ - ромб. Противлежащие ребра оказались равны, грани – равные треугольники и тетраэдр - равногранный.

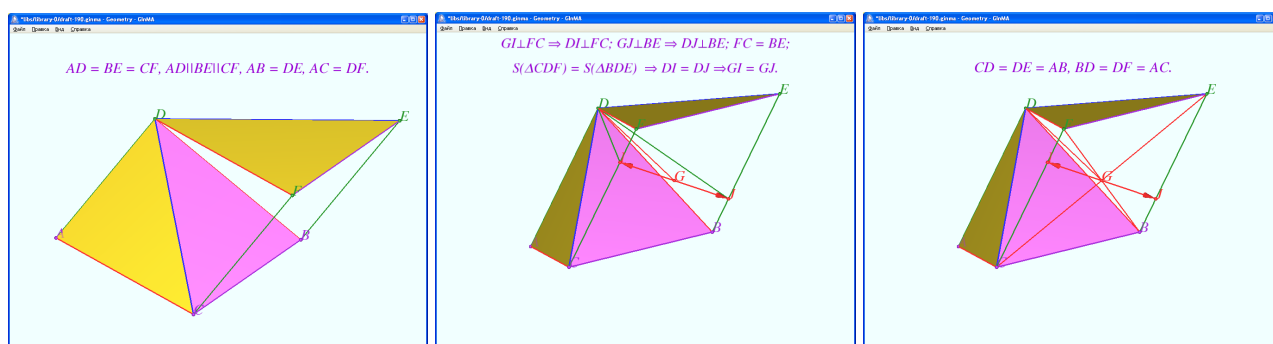


Рис. 3 Тетраэдр, грани которого равновелики

Задача 4. Свойства сфер равногранного тетраэдра (Шарыгин 324)

Задание [1,324]. Докажите, что в равногранном тетраэдре $ABCD$:

1. Центры вписанной и описанной сфер совпадают.
2. Центр вписанной сферы совпадает с центром масс.
3. Центр описанной сферы совпадает с центром масс.
4. Отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, взаимно перпендикулярны.
5. Центры внеписанных сфер – это вершины тетраэдра, равного данному.
6. Радиусы внеписанных сфер равны и вдвое больше радиуса вписанной сферы.

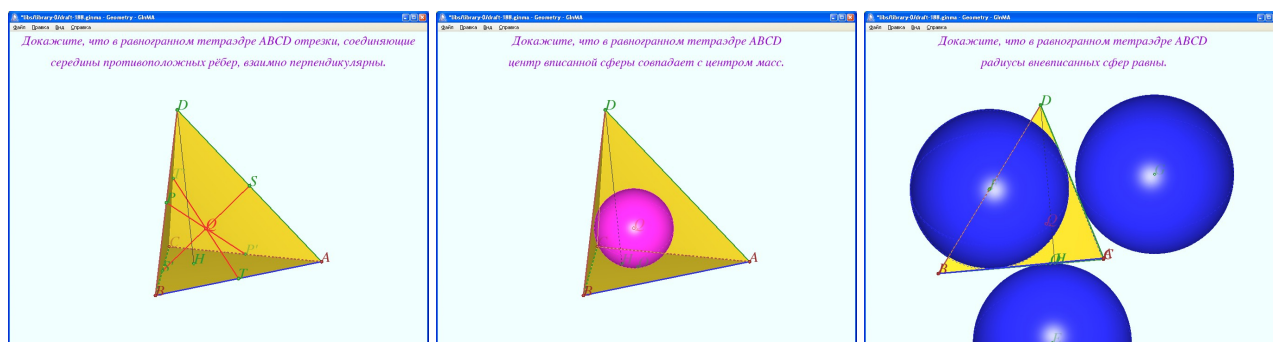


Рис. 4 Свойства сфер равногранного тетраэдра

Задача 5. Сфера 12 точек равногранного тетраэдра

Задание [1,326]. Докажите, что в равногранном тетраэдре основания высот, середины высот и ортоцентры граней лежат на поверхности сферы, центр которой совпадает с центрами описанной и вписанной сфер.

Исследование: На рисунке показаны ортоцентр грани ABC точка H_1 , центр O окружности, описанной вокруг основания треугольника ABC , основание высоты тетраэдра DH , F – середина DH , которое является ортоцентром треугольника $A'B'C'$ развёртки, центр тяжести тетраэдра M , являющийся центром описанной сферы.

Решение: Известно, что в каждой грани одинаковы и равны между собой расстояния между центром описанной вокруг любой грани окружности O и ортоцентром этой грани H_1 , и расстояние от основания высоты H до центра описанной окружности $OH_1 = OH = a$. Также одинаковы и равны для всех граней расстояния между центром масс тетраэдра (центром вписанной и описанной сфер) и центром описанной вокруг любой грани окружности MO . Радиус вписанной сферы $r = MO$ равен четверти высоты и перпендикулярен соответствующей грани $V = \frac{Sh}{3} = 4\frac{Sr}{3}$. Если обозначить $\rho = \sqrt{a^2 + r^2}$, то расстояние между центром M и тройками точек каждой грани $MH = MF = MH_1$.

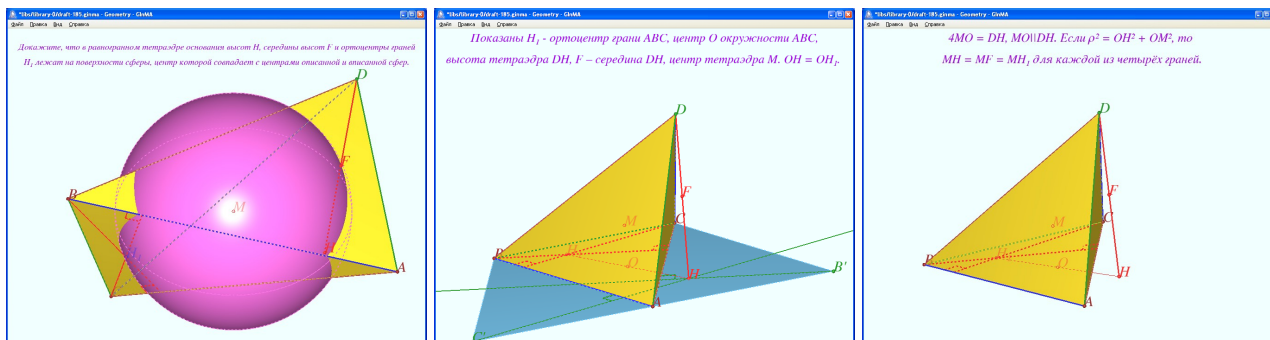


Рис. 5 Сфера 12 точек равногранного тетраэдра

Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. Стереометрия. 10 – 11 кл.: Пособие для учащихся. – М.: Дрофа, 1998. – 272 с.
2. Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: –Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. –М.: Изд. МЦНМО. 2006. – 256 с. (Часть 1. Глава 8. Сфера. §3. с. 139 – 154.)
3. Т.Е. Годзь, В.В. Шеломовский. Музыка сфер. –Мурманск.: Милори, 2000. – 88 с.