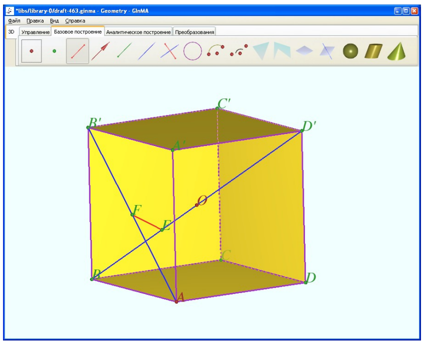
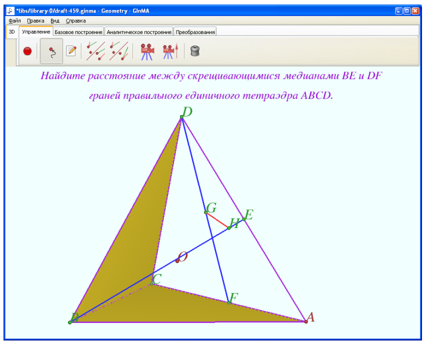
Расстояние между прямыми

Интерактивные решения задач о скрещивающихся прямых, диагоналях, медианах внутри куба и тетраэдра.

http://www.deoma-cmd.ru/

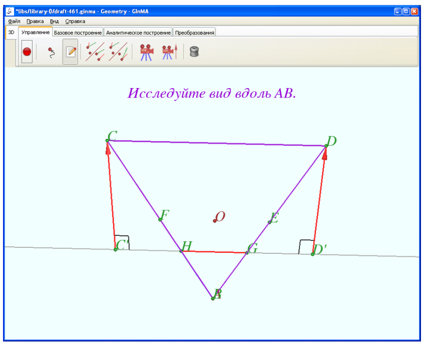
Материалы комплекта можно использовать на уроках в классе общеобразовательной школы. Комплект представляет решения задач, сопровождаемые интерактивными файлами, выполненными в программе GInMA. Решение стереометрических задач, исследование пространственных построений с помощью интерактивных файлов углубляет понимание геометрии, развивает пространственное воображение учащихся.

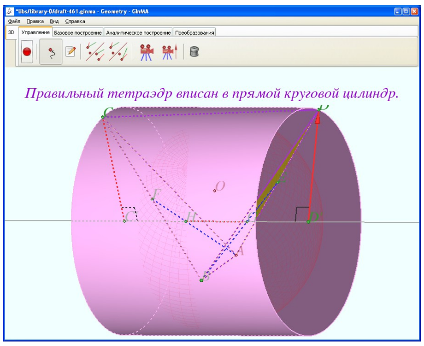




Расстояние между диагоналями куба, между медианами тетраэдра

В комплекте выполнены интерактивные исследования скрещивающихся прямых. Рассматриваются задачи на нахождение расстояний между диагоналями, медианами, перпендикулярами и ребрами таких объемных тел, как куб и тетраэдр.





Расстояния от вершин тетраэдра до прямой

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между любыми объектами – это наименьшее расстояние между парой точек, размещенных по одной на этих объектах. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине отрезка общего перпендикуляра к этим прямым.

Для того, чтобы найти расстояние между пересекающимися прямыми, достаточно ***провести плоскость, перпендикулярную одной из них, и найти расстояние между точкой, являющейся изображением этой прямой, и изображением второй прямой***.

Отношение, в котором общий перпендикуляр делит отрезок, расположенный на второй прямой, равно отношению, в котором изображение перпендикуляра к этой прямой делит изображение отрезка.

Часто точка (изображение первой прямой) оказывается в вершине прямого угла, гипотенузой которого служит отрезок второй прямой. В этом случае, для поиска расстояния между прямыми можно использовать формулу для высоты прямоугольного треугольника с катетами ***a*** и ***b***:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Полезна и формула для отношения отрезков, на которые высота делит гипотенузу:

$$m : n := a^2 : b^2.$$

Векторный метод

Пусть первая прямая задана точкой ***L*** и единичным вектором ***p***, вторая прямая задана точкой ***M*** и единичным вектором ***q***. Пусть ***AB*** – общий перпендикуляр, длина отрезка ***LA*** равна ***p***, длина ***MB*** равна ***q***,. Тогда:

$$\begin{cases} L + px = A \\ M + qy = B \end{cases} \Rightarrow A - B = L - M + px - qy$$

Вектор ***AB*** перпендикулярен как ***p***, так и ***q*****,** его скалярное произведение на каждый из этих векторов равно нулю:

$$\begin{cases} (A - B)p = 0 \\ (A - B)q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (L - M + px - qy)p = 0 \\ (L - M + px - qy)q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (L - M)p + x - pqy = 0 \\ (L - M)q + pqx - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{(M - L)(p - q(pq))}{1 - (pq)^2}$$

$$A = L + p\frac{(M - L)(p - q(pq))}{1 - (pq)^2}; B = M + q\frac{(L - M)(q - p(pq))}{1 - (pq)^2}$$

Задача 1. Проверка определения

Задание. На интерактивном рисунке точки задают прямые ***L*** и ***M***. Точки ***A*** на прямой ***L*** и ***B*** на прямой ***M*** подвижны. На шкале указано отношение расстояния между прямыми к расстоянию между ***A*** и ***B***.

Исследование. Выберите положение прямых, пользуясь точками ***L*** и ***M***. Затем, перемещая точки ***A*** и ***B*** по прямым, попытайтесь минимизировать расстояние между ними. Перейдя на следующий шаг, сравните истинное положение общего перпендикуляра и найденное Вами положение. Рассмотрите, как выглядит общий перпендикуляр в разных ракурсах.

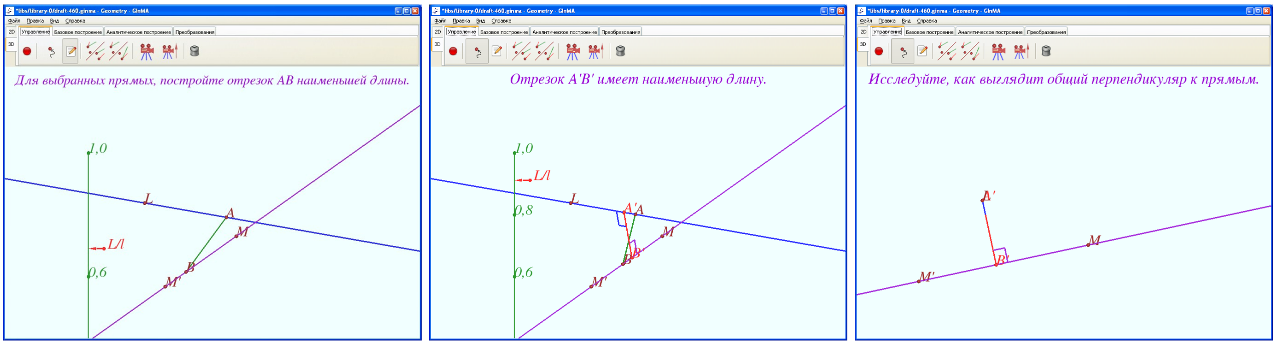


Рис. 1. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Задача 2. Метод определения расстояния между скрещивающимися прямыми

***Задание* [1.4.3.]** Докажите, что расстояние между заданными скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную её плоскость, до проекции другой прямой на эту же плоскость.

Решение. На интерактивном рисунке активные точки задают прямые ***AB*** и ***CD***. Строим плоскость ***P***, проходящую через точку ***A*** и перпендикулярную ***AB***. Эта плоскость пересекает ***CD*** в точке ***E***. Проекция ***CD*** на эту плоскость – прямая ***EF***, где ***F*** – проекция любой точки прямой ***CD*** на ***PF***. Строим проекцию ***H*** точки ***A*** на прямую ***EF***. Рассмотрим вектор ***XY = AH***, начало которого ***X*** находится на прямой ***AB***. Существует ли такое положение ***L*** точки ***X***, при котором точка ***Y*** находится на прямой ***CD***? Действительно, ***AHA'ELK*** – часть прямоугольного параллелепипеда.

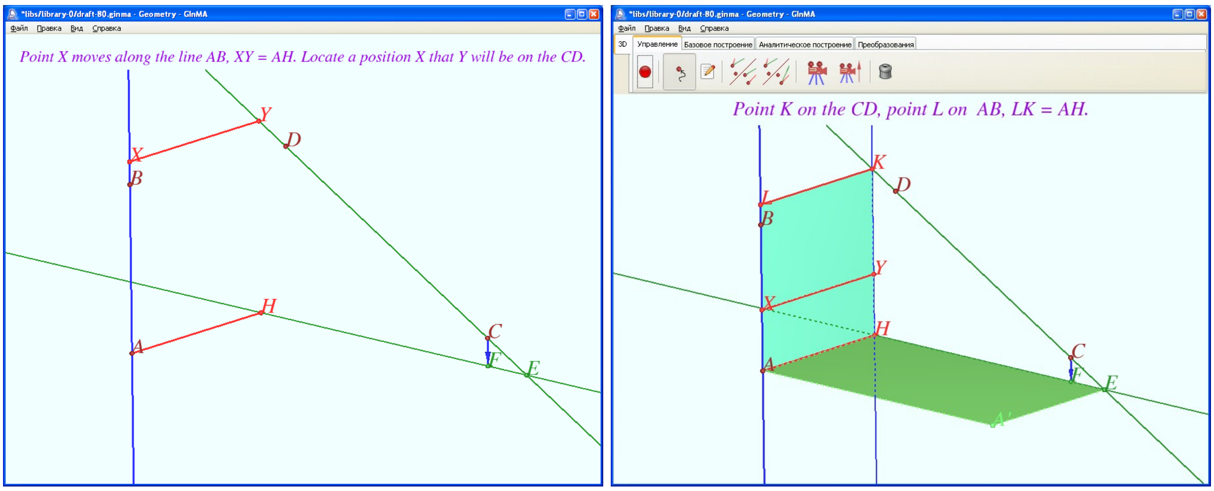


Рис. 2. Определение расстояния между скрещивающимися прямыми

Задача 3. Расстояние между диагоналями единичного куба

Задание. Найдите расстояние между диагональю ***BD'*** единичного куба ***ABCDA'B'C'D'*** и диагональю ***AB'*** грани ***AA'B'B,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр делит диагонали.

Решение. Пусть ***EF*** – отрезок общего перпендикуляра (***E*** на диагонали ***BD'***). Рассмотрим вид вдоль ***AB'***. ***A'B⊥AB'***, значит, в этом виде $A'B = \sqrt{2}, u = (AB) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Символ ***(AB)*** означает длину проекции ***AB*** на плоскость рисунка, перпендикулярную направлению

AB'. AD⊥AB', значит, в этом виде ***AD*** $= 1$, ***v = (AO)*** = 0,5. Искомое расстояние найдём, как высоту прямоугольного треугольника со сторонами $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = 2 + 4; h = \sqrt{\frac{1}{6}}$.

Отношение $\frac{(BE)}{(OE)} = \frac{u^2}{v^2} = 2; \frac{ED'}{BE} = \frac{2(BO) - BE}{BE} = 3 - 1 = 2$.

Чтобы найти ***AF* : *B'F*** рассмотрим вид вдоль ***BD'***. Куб превращается в правильный шестиугольник, ***AF* = *B'F***.

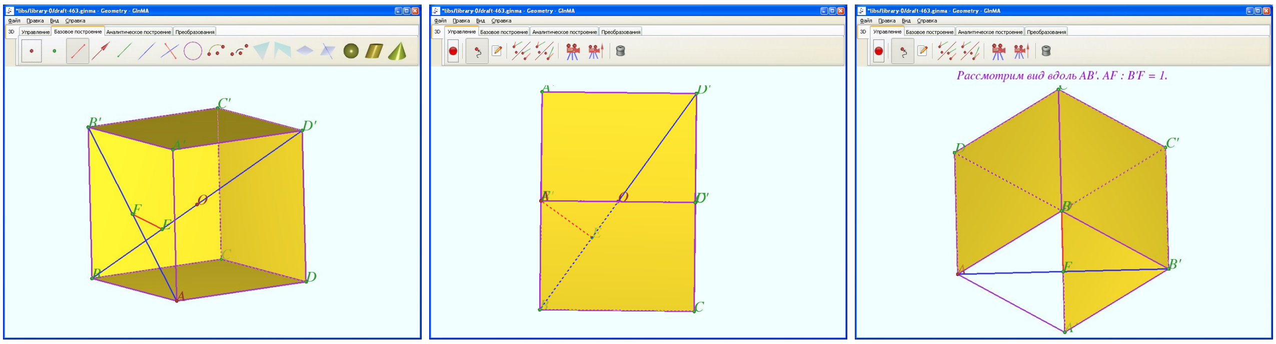


Рис. 3. Расстояние между диагоналями единичного куба

Задача 4. Расстояние между отрезками в единичном кубе

Задание. Найдите расстояние между диагональю ***AB'*** грани ***AA'B'B*** единичного куба ***ABCDA'B'C'D'*** и отрезком ***CM*** (***M*** – середина ***BB'***) ***AA'B'B***, и отношение, в котором общий перпендикуляр делит диагональ и отрезок.

Решение. Пусть ***EF*** – отрезок общего перпендикуляра (***E*** на прямой ***CM***). Рассмотрим вид вдоль ***AB'***. ***A'B⊥AB'***, значит, в этом виде $A'B = \sqrt{2}, u = (AB) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Символ ***(AB)*** означает длину проекции ***AB*** на плоскость рисунка, перпендикулярную направлению ***AB'***. ***AD⊥AB'***, значит, в этом виде ***AD*** $= 1$, ***v = (AO)*** = 0,5. Искомое расстояние найдём, как высоту прямоугольного треугольника со сторонами $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = 2 + 4; h = \sqrt{\frac{1}{6}}$.

Отношение $\frac{(BE)}{(OE)} = \frac{u^2}{v^2} = 2; \frac{ED'}{BE} = \frac{2(BO) - BE}{BE} = 3 - 1 = 2$.

Чтобы найти ***AF* : *B'F***, рассмотрим вид вдоль ***BD'***. Куб превращается в правильный шестиугольник, ***AF* = *B'F***.

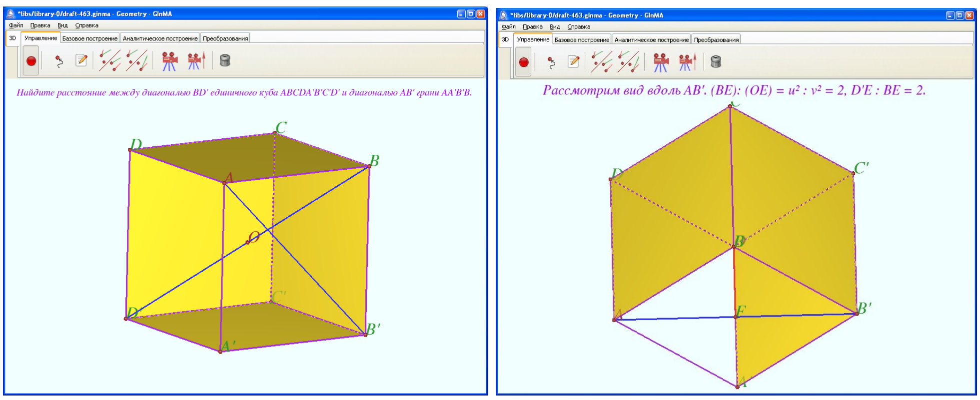


Рис. 4. Расстояние между отрезками в единичном кубе

Задача 5. Расстояние между ребром и медианой грани правильного тетраэдра

Задание. Найдите расстояние между ребром ***CD*** и медианой ***AF*** грани ***ABC*** правильного единичного тетраэдра ***ABCD,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр делит ребро и медиану.

Решение. Пусть ***EH*** – отрезок общего перпендикуляра (***E*** на ребре ***CD***). Рассмотрим вид вдоль ***AF. BC⊥FA***, значит, в этом виде ***BC = 1. F*** – середина ***BC, u*** = (***CH***) = 0,5. Символ (***CH***) означает длину проекции ***CH*** на плоскость, перпендикулярную ***AF***. ***AD⊥BC***, причём длина (***HD***) равна высоте тетраэдра $v = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Искомое расстояние найдём, как высоту прямоугольного треугольника со сторонами $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = 4 + \frac{3}{2}; h = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

Отношение $\frac{CE}{DE} = \frac{(CH)^2}{(DH)^2} = \frac{3}{8}$.

Чтобы найти ***AH*** : ***FH,*** рассмотрим вид вдоль ***CD.*** Тетраэдр превращается в равнобедренный треугольник с основанием ***AB*** = 1. Его боковые стороны равны медианам $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Его медиана $AF = \sqrt{\frac{AB^2 + AD^2}{2} - BF^2} = \frac{\sqrt{11}}{4}$. ***AH + FH = AF.*** По теореме Пифагора:

$AH^2 - HF^2 = AD^2 - DF^2 = 9/16$. $AH - FH = \frac{9}{4\sqrt{11}}$; ***AH : FH = 10.***

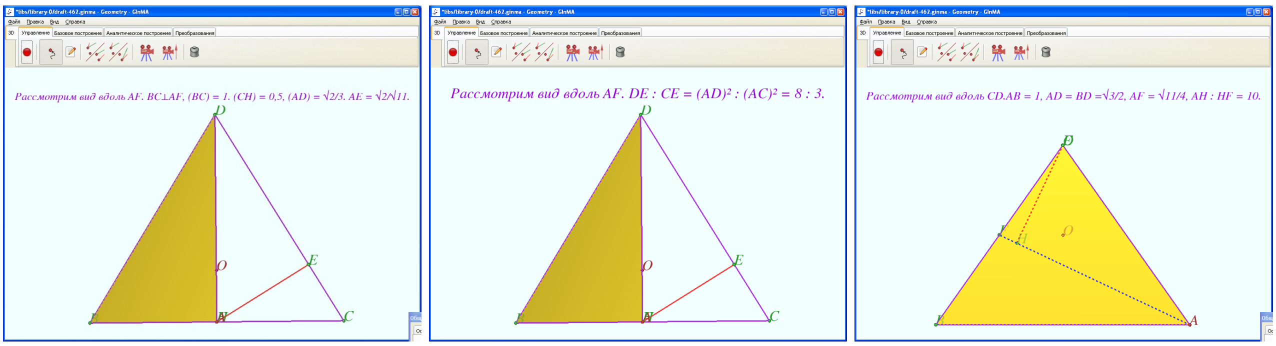


Рис. 5. Расстояние между ребром и медианой грани правильного тетраэдра

Задача 6. Расстояние между медианами правильного тетраэдра

Задание. Найдите расстояние между скрещивающимися медианами двух граней правильного единичного тетраэдра ***ABCD,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр к медианам делит их.

Решение. Пусть ***BE*** и ***DF*** – медианы граней ***ABD*** и ***ACD***. Рассмотрим вид вдоль ***DF. AC⊥FG***, значит, в этом виде ***AC = 1. F*** – середина ***AC, E*** – середина ***AF***, ***u*** = (***EF***) = 0,25. Символ (***EF***) означает длину проекции ***EF*** на плоскость, перпендикулярную ***DF***. ***AC⊥BF***, причём длина (***BF***) равна высоте тетраэдра $v=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Искомое расстояние найдём, как высоту прямоугольного треугольника со сторонами $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=16+\frac{3}{2}; h=\sqrt{\frac{2}{35}}$.

Отношение $\frac{BH}{EH}=\frac{(EF)^2}{(BF)^2}=\frac{32}{3}$. Чтобы найти ***DF*** : ***FG*** рассмотрим вид вдоль ***AD.*** Угол $\angle A$ наблюдаемого равнобедренного треугольника ***ABC*** равен двугранному углу тетраэдра, его косинус равен $\frac{1}{3}$.

$$(AH)=\frac{3}{35}AB,(AG)=\frac{(AH)}{\cos\alpha}=\frac{9}{35};\frac{DG}{DF}=\frac{(AG)}{(AF\}}=\frac{(AG)}{(AC)/2}=\frac{18}{35};DG:FG=18:17.$$

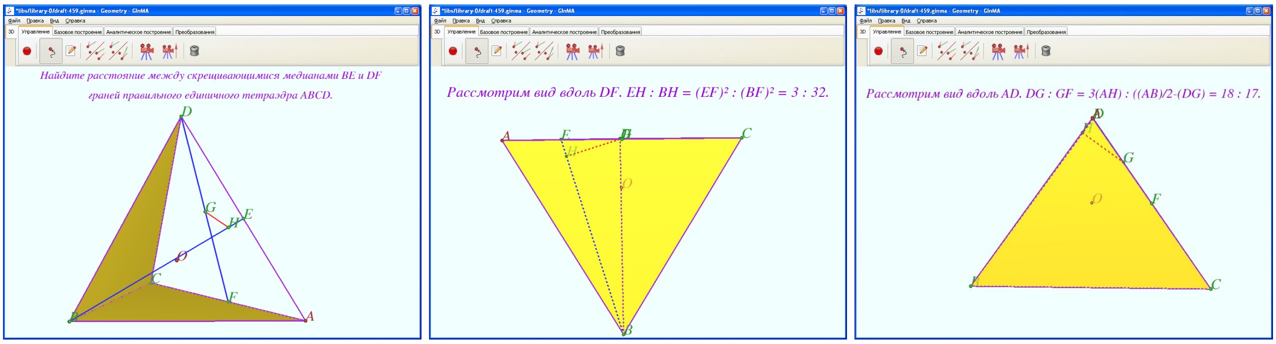


Рис. 6. Расстояние между медианами правильного тетраэдра (1)

Решена ли задача?

Предложите ученикам закончить решение дома самостоятельно.

Следующий шаг. Найдите расстояние между скрещивающимися медианами ***AF*** и ***BE*** граней ***ABC*** и ***ABD***.

Решение. Рассмотрим вид вдоль ***AF. AD⊥BC***, значит, в этом виде ***BC = 1, u*** = (***AB***) = 0,5. Длина (***AD***) равна высоте тетраэдра $\sqrt{\frac{2}{3}}$. ***E*** – середина ***AD,*** $v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ Искомое расстояние найдём, как высоту прямоугольного треугольника со сторонами ***u*** и ***v***:

$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=4+6=10; h=\sqrt{\frac{1}{10}}$. Отношение $\frac{BG}{EG}=\frac{(AB)^2}{(AE)^2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. Чтобы найти ***DF*** : ***FG*** рассмотрим вид вдоль ***BE.*** Здесь также ***AH : FH = 3 : 2.***

Для завершения решения необходимо проверить, что расстояния между произвольно выбранной медианой ***CE*** и любыми другими медианами такие же.

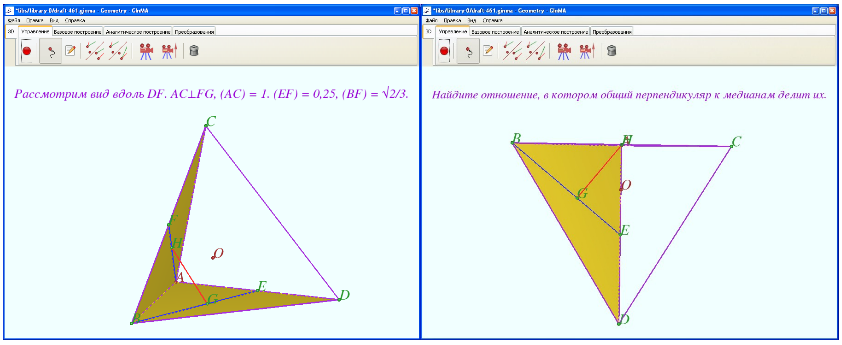


Рис. 7. Расстояние между медианами правильного тетраэдра (2)

Задача 7. Тетраэдр, вписанный в цилиндр

Задание. Найдите расстояние между общим перпендикуляром к скрещивающимся медианам и вершинами тетраэдра.

Решение. $\boldsymbol{AH \perp GH}$, $\boldsymbol{AH = 0{,}6AF} = \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$ значит, расстояния от $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ до общего перпендикуляра равны $\dfrac{3\sqrt{3}}{10}$.

Пусть $\boldsymbol{C'C \perp GH}$. Прямая $\boldsymbol{GH}$ расположена в плоскости, параллельной $\boldsymbol{CD}$ и $\boldsymbol{AB}$. $\boldsymbol{GH = C'H = D'H}$. Проекция $\boldsymbol{C'C}$ на эту плоскость $(\boldsymbol{C'C}) = \dfrac{GH}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{10}}$.

Рассмотрим вид вдоль $\boldsymbol{AB}$. $\boldsymbol{AG : GE = 3 : 2}$, $\boldsymbol{AE = DE}$. значит $\boldsymbol{GE = 0{,}6AF}$. Косинус двугранного угла тетраэдра равен $\boldsymbol{1/3}$, половины угла $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Проекция $\boldsymbol{C'C}$ на эту плоскость

$$(C'C) = 0{,}7AF\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}7\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{7}{10\sqrt{2}};\, CC'^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{7}{10\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{27}{100};\, CC' = \frac{3\sqrt{3}}{10}.$$

Таким образом правильный единичный тетраэдр может быть вписан в прямой круговой цилиндр с радиусом $\dfrac{3\sqrt{3}}{10}$ ***и длиной образующей*** $3GH = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

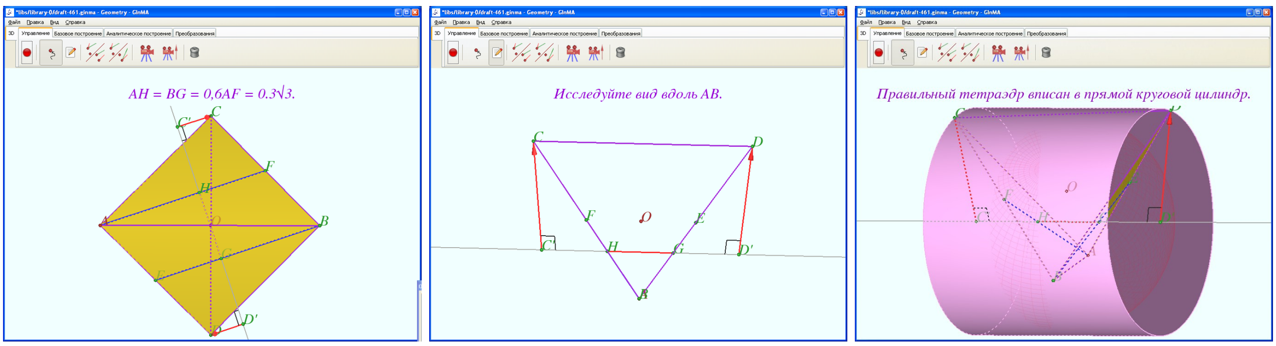


Рис. 8. Расстояния от вершин тетраэдра до прямой

Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. 10 – 11 кл.: Учебник. –М.: Дрофа, 2007. – 206 с.

2. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. Стереометрия. 10 – 11 кл.: Пособие для учащихся. –М.: Дрофа, 1998. – 272 с.

3. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 10. –М.: МФТИ, 1996. – 256 с.

4. Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: –Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. –М.: Изд. МЦНМО. 2006. – 256 с.

5. С.Ф. Шестаков. Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. –М.: МЦНМО, 2005. – 112 с.