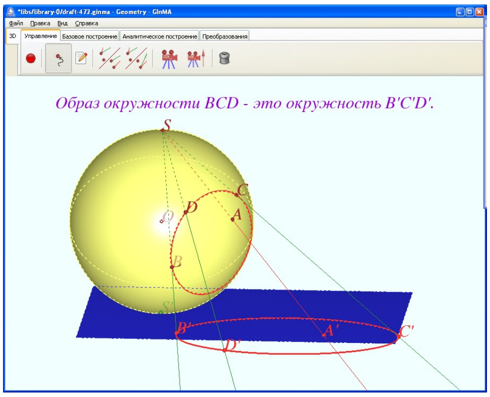
Стереографическая проекция

Комплект: Углублённая геометрия

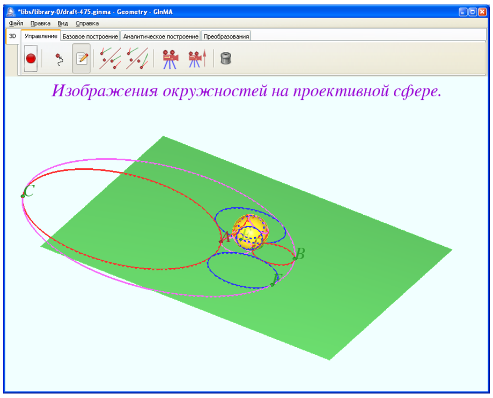
Интерактивные исследования свойств стереографической проекции, решения задач о группах касающихся окружностей.

http://www.deoma-cmd.ru/

Материалы комплекта можно использовать на уроках в классе с углубленным изучением математики, для создания учебного школьного проекта или исследования, представляемого на математический конкурс. Исследование пространственных построений с помощью интерактивных файлов углубляет понимание геометрии, развивает пространственное воображение учащихся. Стереографическая проекция есть частный случай инверсии, мощного инструмента геометрии, позволяющей выполнить лаконичные, изящные решения задач, которые стандартными методами вычислений делаются сложно, громоздко, со значительными трудностями. Представить стереографическую проекцию «в уме» не очень просто, не легче разобраться, пытаясь привлечь на помощь чертеж – картинку. Понять инверсию, ее свойства, «увидеть», что это такое, помогают динамические иллюстрации, интерактивные изображения, выполненными в программе GInMA.

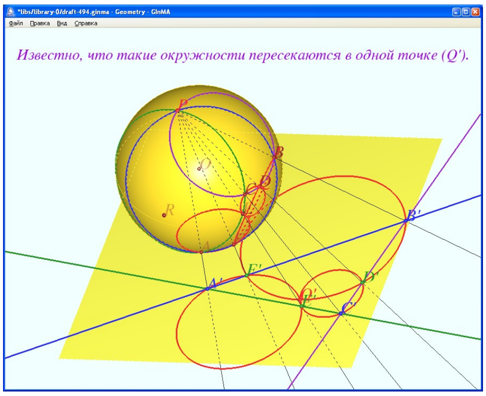


Стереографическая проекция окружности

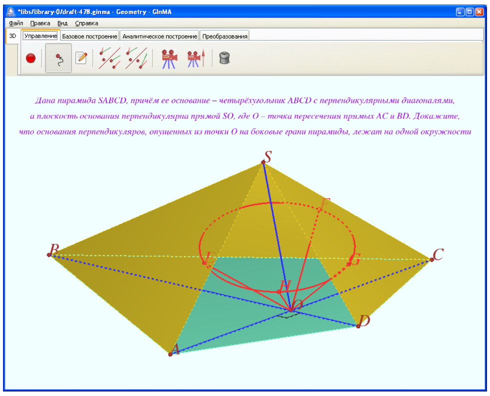


Касающиеся окружности

В комплекте исследуются основные свойства стереографической проекции. Рассмотрены несколько задач, которые эффективно (и эффектно) решаются с помощью стереографической проекции: задачи, где рассматриваются группы касающихся окружностей, вторая точка пересечения тройки окружностей, двенадцать окружностей, каждая из которых касается пяти остальных, задача о свойстве проекций на грани пирамиды. Решения сопровождаются интерактивными файлами, выполненными в программе GInMA.



Пересечение троек окружностей



Свойство проекций на грани пирамиды

Стереографическая проекция

Стереографическая проекция - это центральная проекция сферы (***O,R***) из её точки ***S*** на плоскость ***П***, касающуюся сферы в диаметрально противоположной точке ***S'***.

Пусть плоскость ***П*** касается сферы в точке ***N***, ***SS'*** – диаметр этой сферы. Стереографической проекцией из точки ***S*** называют отображение сферы с выколотой точкой ***S*** на плоскость ***П***, при котором точке ***A***, лежащей на сфере, сопоставляется точка ***A'***, в которой луч ***SA*** пересекает плоскость ***П***.

Задание **[3, 1.Гл.8,§5]**. Докажите, что стереографическая проекция сферы (***O,R***) из её точки ***S*** на плоскость ***П***, на множестве точек этой сферы совпадает с инверсией пространства относительно сферы (***S,2R***).

Доказательство.

При стереографической проекции из точки ***S*** точке ***A***, лежащей на сфере, сопоставляется точка ***A'***, в которой луч ***SA*** пересекает плоскость ***П***. Пусть $SO = R$, $\angle OSA = \alpha$. Тогда $SA = 2R\cos\alpha$, $SS' = 2R$, $SS' : SA' = \cos\alpha$. Значит, $SA \cdot SA' = 4R^2$.

При инверсии пространства относительно сферы (***S,2R***) по определению $SA \cdot SA' = 4R^2$.

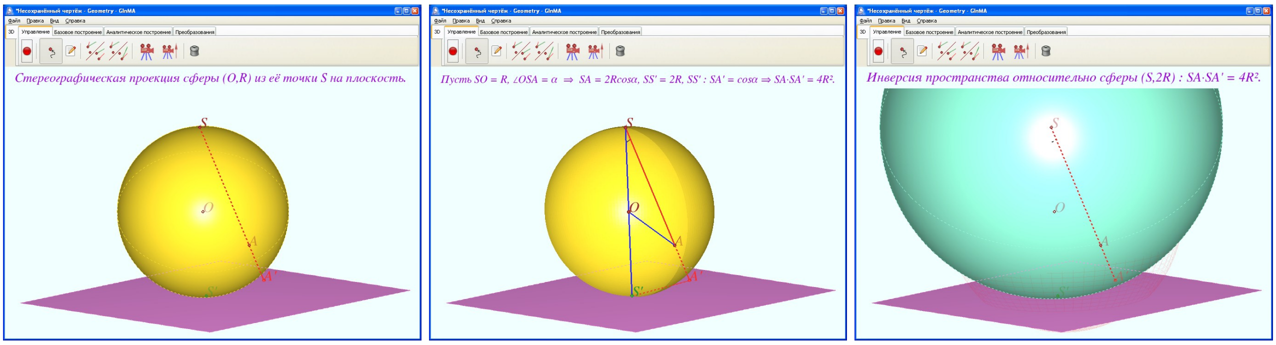


Рис. 1. Стереографическая проекция точки

Свойства стереографической проекции
(Стереографическая проекция как инверсия)

Задание **[3, 1.Гл.8,§5]**. Стереографическая проекция – это частный случай инверсии. Пользуясь контрольной точкой, проверьте свойства инверсии:

– при проектировании окружность на сфере, проходящая через точку ***S***, переходит в прямую в плоскости проекции;

– при проектировании окружность на сфере, не проходящая через точку ***S***, переходит в окружность в плоскости проекции;

– при проектировании сохраняются углы между кривыми;

– при проектировании касающиеся кривые преобразуются в касающиеся;

– прямые и окружности плоскости при обратной проектированию операции проектируются на сферу в окружности, соответственно проходящие и не проходящие через центр проектирования точку ***S***.

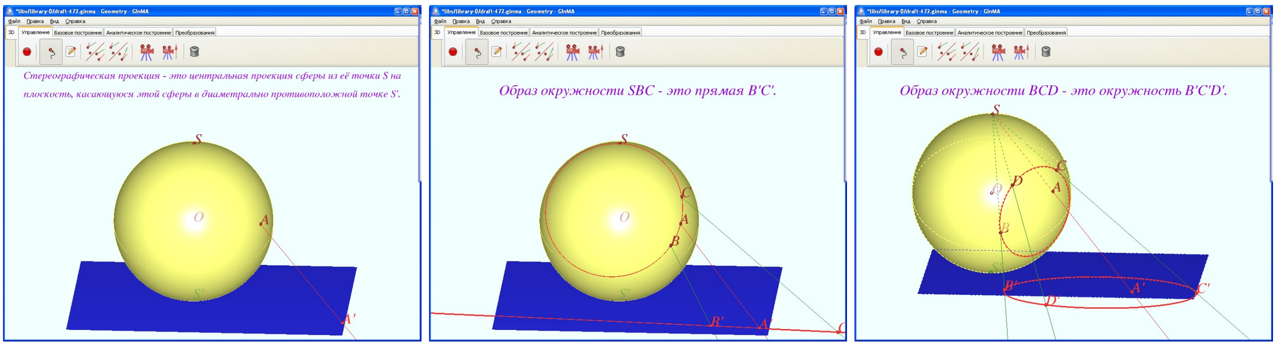


Рис.2. Стереографическая проекция окружности

Задача 1. Группы касающихся окружностей

Задание. Расположите на плоскости четыре окружности так, чтобы каждая касалась трёх из остальных.

Расположите на плоскости шесть окружностей так, чтобы каждая касалась ровно четырёх из остальных.

[2,20.30]. Расположите на плоскости двенадцать окружностей так, чтобы каждая касалась ровно пяти из остальных.

Расположите на плоскости двадцать окружностей так, чтобы каждая касалась трёх из остальных.

Исследование. В Вашем распоряжении четыре интерактивных файла. Исследуйте, как построены конфигурации. На всех интерактивных рисунках активна точка ***A*** касания пары окружностей. На простейшем рисунке активна также точка ***B*** – центр стереографической проекции.

Решение. Четыре окружности на сфере получены, как сечения сферы правильным полувписанным тетраэдром. Окружности на плоскости - это стереографическая проекция первой группы окружностей.

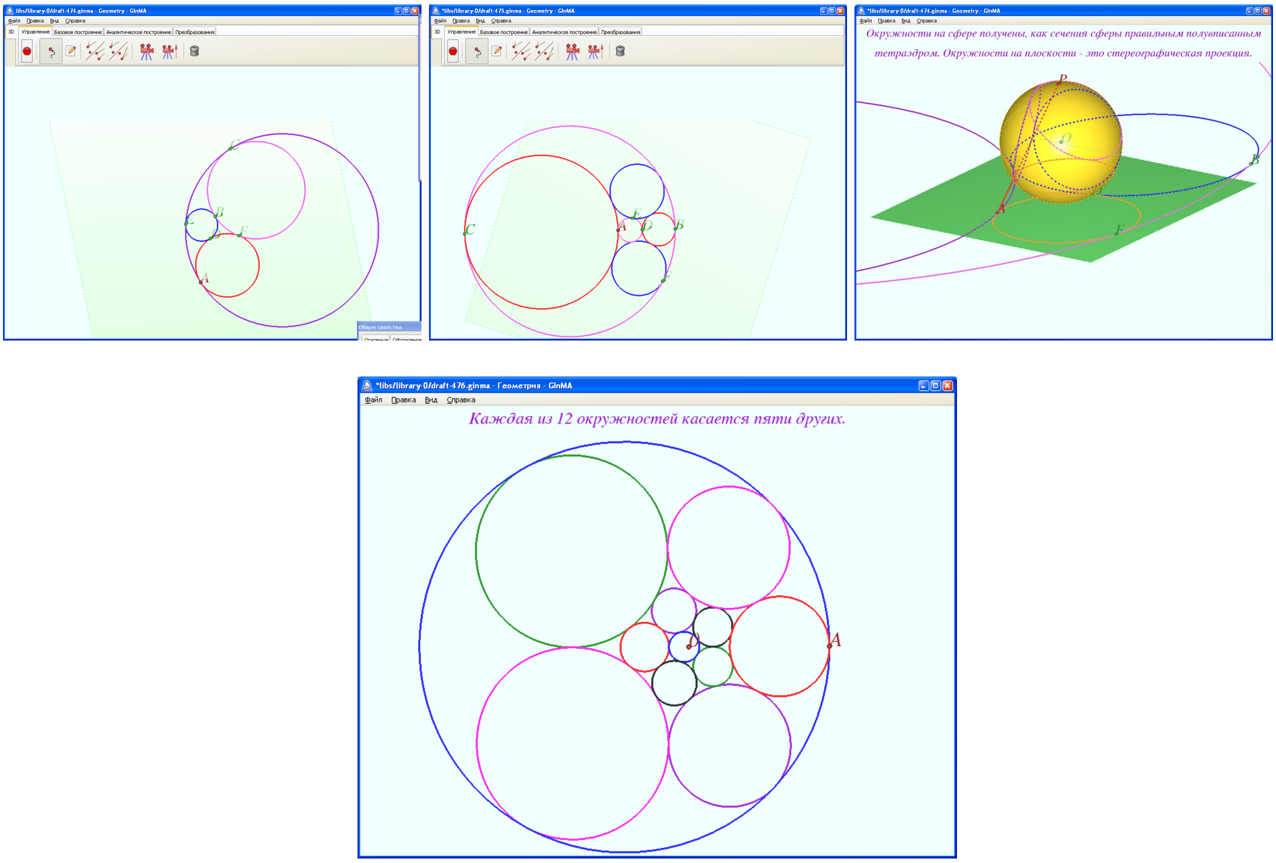


Рис. 3. Касающиеся окружности и способ их построения

Задача 2. Точки пересечения окружностей на сфере

Задание **[2,20.31].** На сфере даны три окружности ***PAB, PBC*** и ***PAC.*** На окружностях выбраны точки ***D***∈***PAB, E***∈***PBC, F***∈***PAC***, отличные от точек ***A, B, C*** и ***P***. Докажите, что окружности ***AEF, BDF*** и ***CDE*** пересекаются в одной точке.

Исследование. Задайте сферу точками ***O*** и ***R***. Перемещая точки ***A, B, C, D, E, F*** и ***P*** по сфере проверьте утверждение задачи.

Решение. Рассмотрим стереографическую проекцию из точки ***P***. При этом преобразовании окружности ***PAB, PBC*** и ***PAC*** перейдут в прямые ***A'B'***, ***A'C'*** и ***C'B'***. Окружности ***AEF, BDF*** и ***CDE*** перейдут в окружности ***A'E'F', B'D'F'*** и ***C'D'E'***. Известно, что такие окружности пересекаются в одной точке ***Q'***. Таким образом, искомая точка пересечения – это прообраз ***Q*** точки ***Q'***.

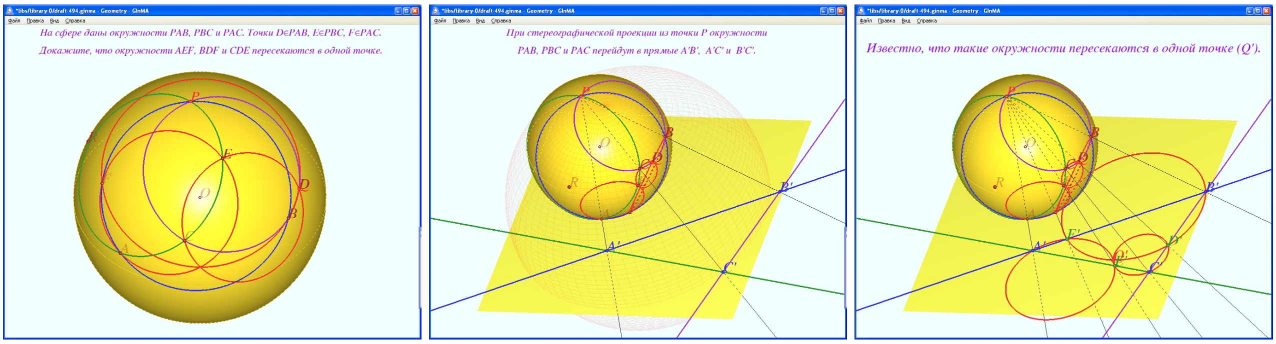


Рис. 4. Пересечение троек окружностей

Задача 3. Свойство проекций на грани пирамиды

Задание [аналог 2,20.28]. Дана пирамида ***SABCD***, причём ее основание – четырёхугольник ***ABCD*** с перпендикулярными диагоналями, а плоскость основания перпендикулярна прямой ***SO***, где ***O*** – точка пересечения прямых ***AC*** и ***BD***. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки ***O*** на боковые грани пирамиды, лежат на одной окружности

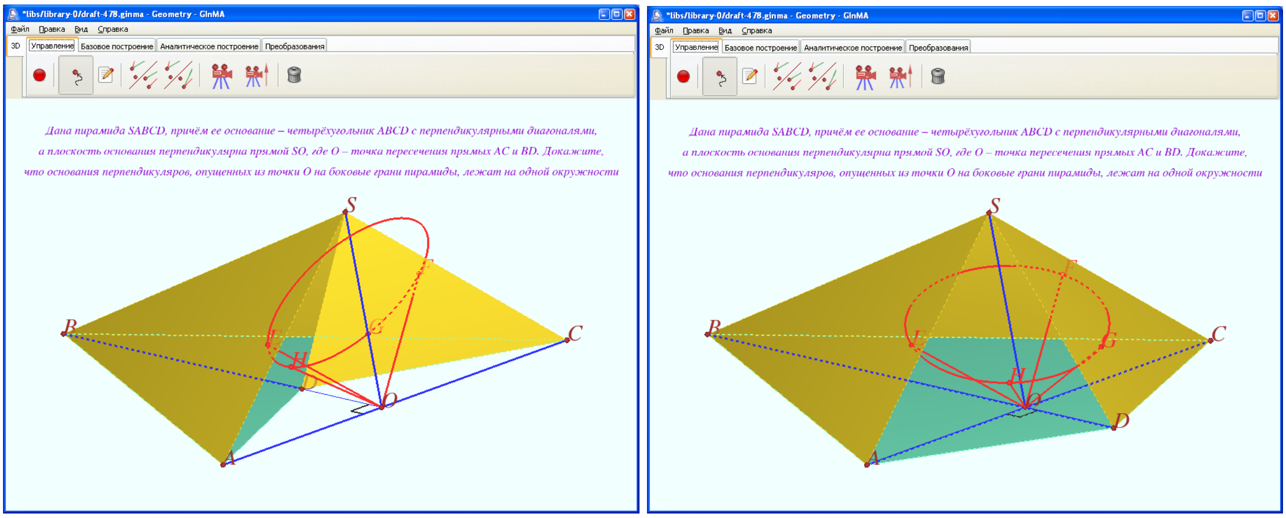


Рис. 5. Свойство проекций на грани пирамиды

Литература

1. В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. –М.: «НАУКА», 1989, Библиотека математического кружка, вып. 19. – 287 с. (Глава 16. с.272 – 281).

2. В. В. Прасолов. Задачи по стереометрии: Учебное пособие. –М.: МЦНМО, 2010. – 352 с.

3. Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: –Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. –М.: Изд. МЦНМО. 2006. – 256 с. (Часть 1. Глава 8. Сфера. §5. с. 154 – 159).