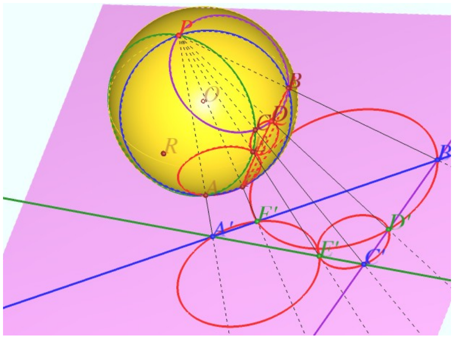
Углублённая геометрия: Сфера

Интерактивные решения задач и исследования: степени точки, радикальных плоскости, оси, центра, точки Микеля, геометрическое место середин касательных.

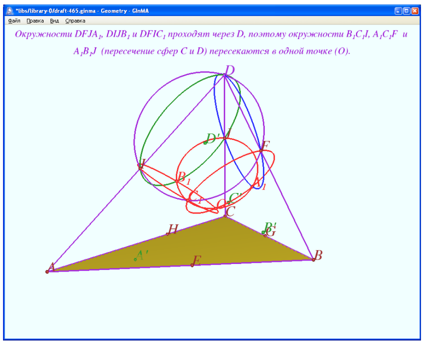
http://www.deoma–cmd.ru/

Для полноценного использования материала установите программу GInMA с сайта www.deoma-cmd.ru и активируйте её. Все иллюстрации — это интерактивные рисунки. Для их активации наведите курсор на иллюстрацию и выполните щелчок левой клавишей мыши.

Материалы комплекта можно использовать на уроках в классе с углубленным изучением математики, для создания учебного школьного проекта или исследования, представляемого на математический конкурс. Комплект представляет решения задач, сопровождаемые интерактивными файлами, выполненными в программе GInMA. Исследование пространственных построений с их помощью углубляет понимание геометрии, развивает пространственное воображение учащихся.

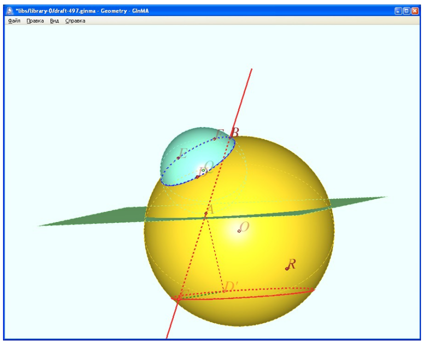


Пересечение окружностей на сфере

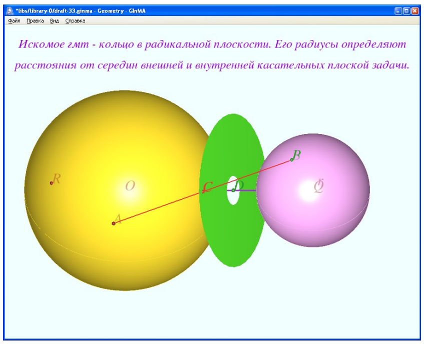


Точка Микеля тетраэдра

В комплекте исследуются понятия, связанные со сферой: степень точки, радикальная плоскость, радикальная ось, радикальный центр, точка Микеля. Рассмотрены решения задач пересечения окружностей на сфере, пересечения сферы прямыми, общих касательных к сферам, пересекающихся сфер. Задачи, касающиеся таких непростых для представления геометрических тел, зачастую вызывают трудности при попытках их просто вообразить, представить «в уме». Наглядные решения этих задач выполнены в программе GInMA.



Луч пересекает сферу



ГМТ середин касательных

Задача 1. Степень точки

Секущая – прямая, имеющая со сферой две общие точки.

Степенью точки A относительно сферы (O,R) называют число $OA^2 – R^2$.

Задание **[6. 1,8,3]**. Пусть прямая, проведенная через точку ***A***, пересекает сферу **(*O,R*)** в точках ***B*** и ***C***. Докажите, что $AB \cdot AC = OA^2 - R^2$ не зависит от выбора прямой.

Решение. Пусть точка ***A*** – вне сферы, ***AD*** – касательная к сфере, окружность ***BCD*** – сечение сферы плоскостью ***BCD***. Прямая ***AD*** имеет одну общую точку ***D*** со сферой, значит, и с окружностью. Она касается окружности. Из подобия $\Delta ACD \sim \Delta ADB$ находим: $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AC}{AD}\Rightarrow AB\cdot AC=AD^2$. Из прямоугольного треугольника ***AOD*** получим, что $AB\cdot AC=AD^2=AO^2-R^2$. Эта величина зависит от сферы **(*O,R*)** и точки ***A*** и не зависит от выбора прямой.

Пусть точка – ***A*** внутри сферы, окружность ***BCO*** – сечение сферы плоскостью ***BCO, EF*** – диаметр окружности, проходящий через точку ***A***. По свойству хорд $AB\cdot AC=AE\cdot AF=\left(R+AO\right)\left(R-AO\right)=R^2-AO^2$. Эта величина зависит от сферы **(*O,R*)** и точки ***A*** и не зависит от выбора прямой.

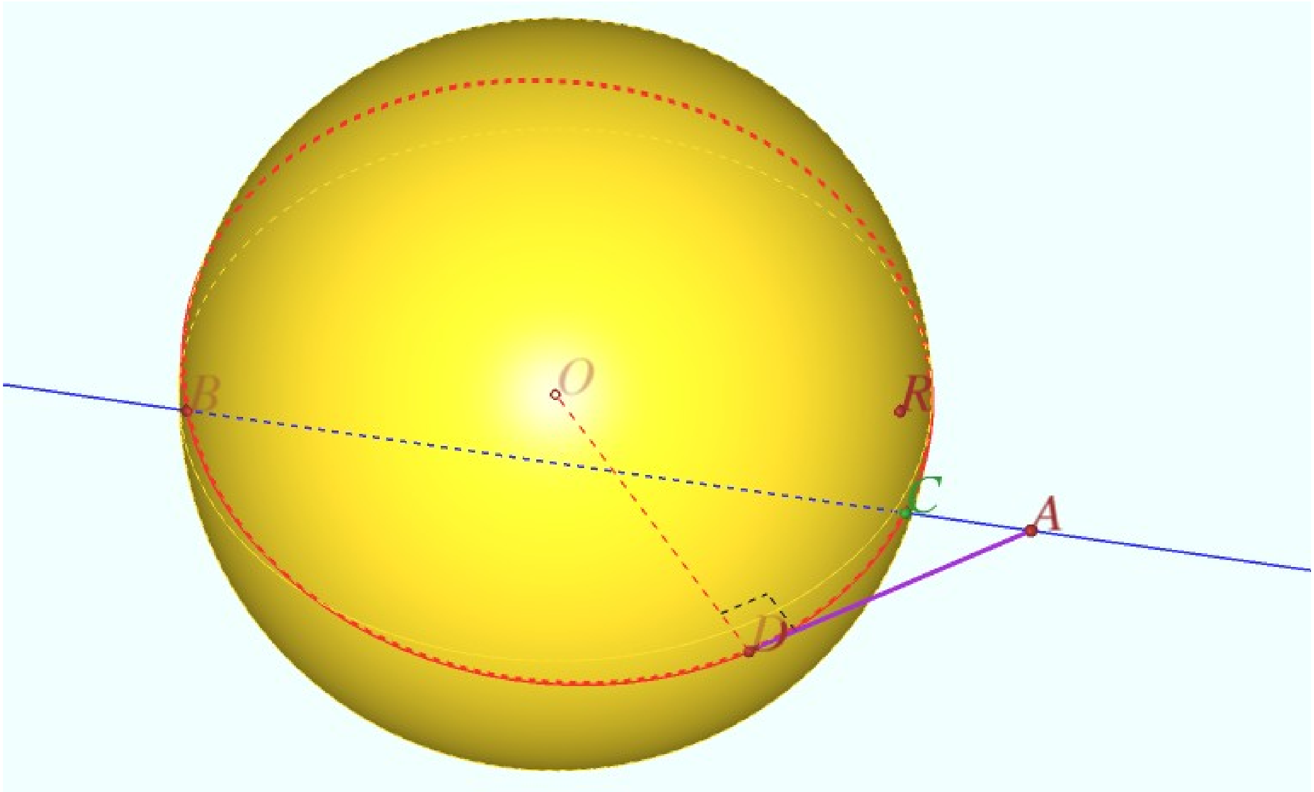


Рис 1. Степень точки. На третьем шаге переместите точку A внутрь сферы.

Задача 2. Радикальная плоскость

Радикальная плоскость двух неконцентрических сфер – это геометрическое место точек, каждая из которых имеет одинаковые степени относительно этих сфер. Если сферы пересекаются, радикальная плоскость содержит окружность, по которой пересекаются сферы.

Задание **[6. 1,8,3]**. Докажите, что «радикальная плоскость» – это плоскость, перпендикулярная линии центров сфер.

Доказательство. Пусть ***ABC*** – плоскость, содержащая линию центров. Она пересекает сферы по окружностям больших кругов. Подмножество точек искомого множества, принадлежащих плоскости ***ABC*** – радикальная ось этих окружностей, перпендикулярная линии центров. Если плоскость ***ABC*** вращать (точкой ***C***) вокруг линии центров, то окружности опишут данные сферы, а радикальная ось плоскость, являющуюся искомым множеством и перпендикулярную линии центров. Для концентрических сфер равенство невыполнимо. Если сферы пересекаются, радикальная плоскость содержит окружность, по которой пересекаются сферы. На этой окружности степень точки равна нулю.

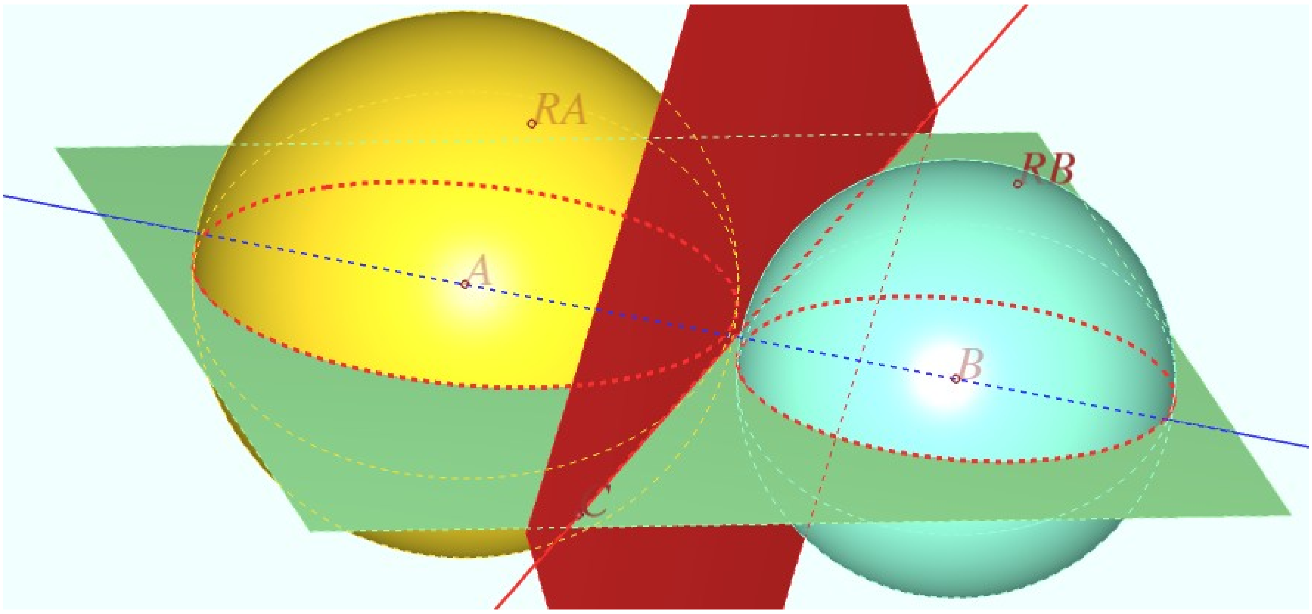


Рис 2. Радикальная плоскость пары неконцентрических сфер

Задача 3. Радикальная ось

Радикальная ось трёх сфер, центры которых не лежат на одной прямой (неколлинеарны) – это геометрическое место точек, каждая из которых имеет одинаковые степени относительно этих сфер. Радикальная ось перпендикулярна плоскости центров этих сфер и содержит радикальный центр трех больших окружностей, по которым эта плоскость пересекает данные сферы. Если сферы пересекаются, радикальная ось содержит две точки каждой сферы, общие для всех трёх сфер.

***Задание* [6. 1,8,3].** Докажите, что «радикальная ось» – это прямая, перпендикулярная плоскости центров сфер.

Доказательство. Радикальная плоскость пары сфер с центрами ***A*** и ***B*** пересекает радикальную плоскость пары сфер с центрами ***C*** и ***B*** (их центры не лежат на одной прямой) по некоторой прямой, которая является геометрическим местом точек, каждая из которых имеет равные степени относительно всех трех сфер. Следовательно, эта прямая лежит в радикальной плоскости сфер с центрами ***A*** и ***C***. Радикальная ось трех сфер совпадает с перпендикуляром к плоскости центров этих сфер, так как каждая из радикальных плоскостей перпендикулярна плоскости центров сфер. Радикальная ось содержит радикальный центр ***O*** трех больших окружностей, по которым плоскость ***ABC*** центров пересекает сферы. Если все сферы пересекаются (имеют общую внутреннюю точку), то в обеих точках пересечения сфер, степени точек относительно каждой из сфер равны нулю, то есть радикальная ось проходит через эти точки. Сферы и радикальная ось симметричны относительно плоскости, содержащей центры сфер.

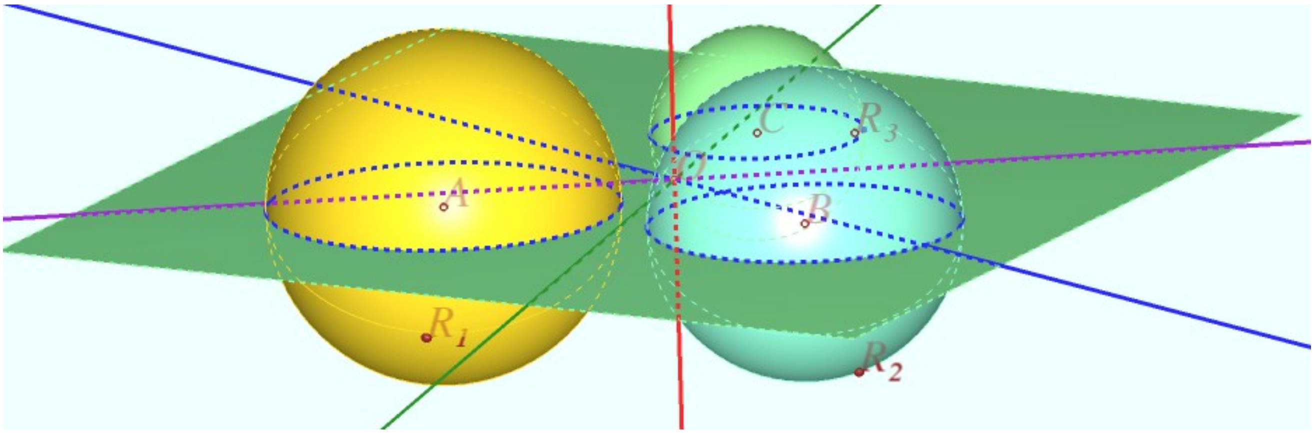


Рис 3. Радикальная ось тройки сфер, центры которых неколлинеарны

Задача 4. Радикальный центр

Радикальный центр четырёх сфер, центры которых не лежат в одной плоскости – это точка, имеющая одинаковые степени относительно этих сфер.

***Задание* [6. 1,8,3]**. Докажите, что если центры четырех сфер некомпланарны, то шесть радикальных плоскостей этих сфер, взятых попарно, и четыре радикальных оси троек сфер имеют общую точку.

Доказательство. Радикальные плоскости пар сфер с центрами ***A*** и ***B***, ***B*** и ***C***, ***C*** и ***D*** пересекаются в одной точке (их центры не лежат в одной плоскости). Эта точка (радикальный центр ***O***) имеет равные степени относительно всех четырёх сфер. Поэтому она лежит в остальных трех радикальных плоскостях и на каждой из четырёх радикальных осей. Если все сферы пересекаются, радикальный центр принадлежит каждой тройке сфер, то есть он принадлежат каждой из четырёх сфер.

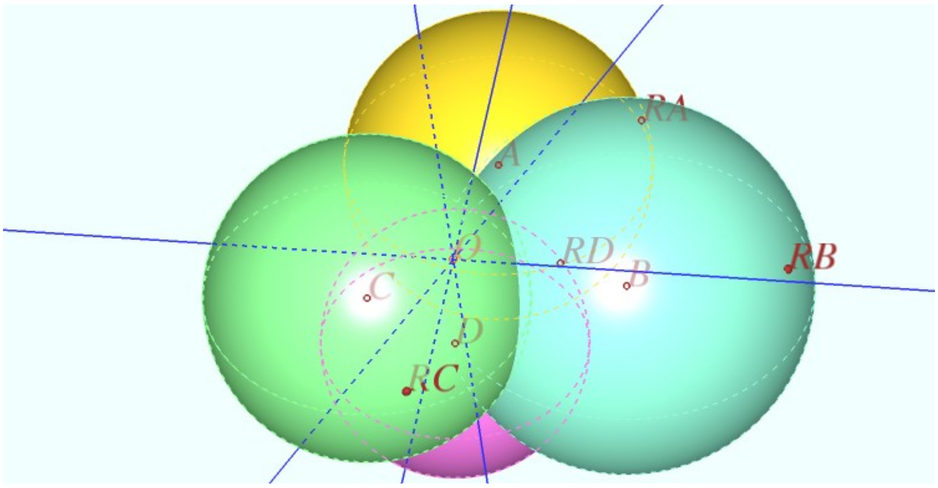


Рис 4. Радикальный центр четырёх сфер, центры которых некомпланарны

Задача 5. Точки пересечения окружностей на сфере

Задание **[3,20.31].** На сфере даны три окружности ***PAB, PBC*** и ***PAC.*** На окружностях выбраны точки ***D***∈***PAB, E***∈***PBC, F***∈***PAC***, отличные от точек ***A, B, C*** и ***P***. Докажите, что окружности ***AEF, BDF*** и ***CDE*** пересекаются в одной точке.

Исследование. Задайте сферу точками ***O*** и ***R***. Перемещая точки ***A, B, C, D, E, F*** и ***P*** по сфере, проверьте утверждение задачи.

Решение. Рассмотрим стереографическую проекцию из точки ***P***. При этом преобразовании окружности ***PAB, PBC*** и ***PAC*** перейдут в прямые ***A'B'***, ***A'C'*** и ***C'B'***. Окружности ***AEF, BDF*** и ***CDE*** перейдут в окружности ***A'E'F', B'D'F'*** и ***C'D'E'***. Известно, что такие окружности пересекаются в одной точке ***Q'***. Таким образом, искомая точка пересечения – это прообраз ***Q*** точки ***Q'***.

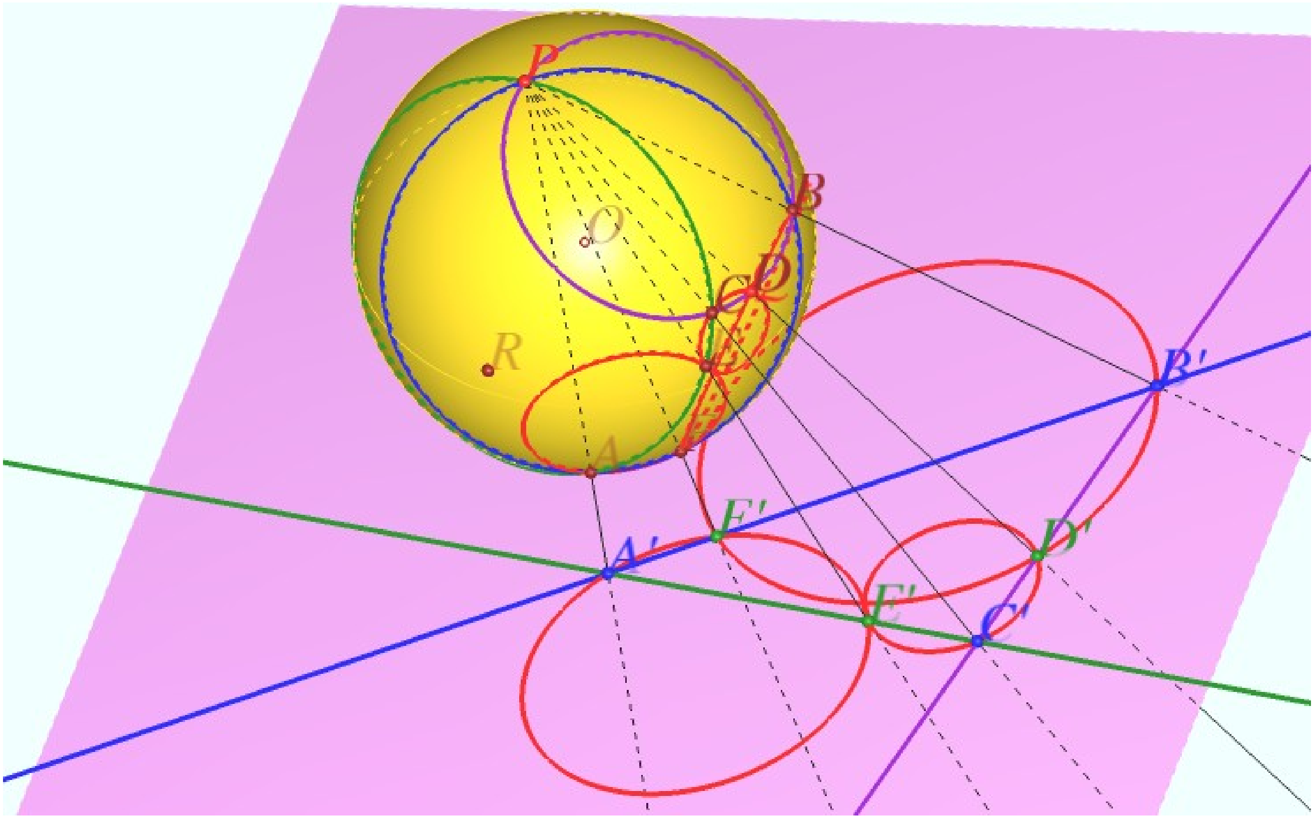


Рис 5. Инверсия для доказательства пересечения окружностей на сфере

Задача 6. Точка Микеля тетраэдра

Задание **[2, 239], [3, 20.32]..** На каждом ребре тетраэдра ***ABCD*** выбрана точка. Докажите, что четыре сферы, каждая из которых проходит через вершину тетраэдра и выбранные точки на выходящих из неё рёбрах, пересекаются в одной точке. Её называют точка Микеля (Miquel Point).

Исследование. Исследуйте, как построены конфигурации. На интерактивном рисунке активны вершины тетраэдра и точки на рёбрах. На разных шагах отсутствует одна из сфер. Видна точка пересечения трёх оставшихся.

Доказательство. Пусть точки ***E,F,G,H,I*** и ***J*** находятся на рёбрах ***AB,BD,BC,AC,AD*** и ***CD***, соответственно. ***O*** – точка пересечения сфер, содержащих вершины ***A, B*** и ***C***. Известно, что в плоскости граней сечения троек сфер, содержащих вершины грани, – это окружности, имеющие общую точку. Такие точки обозначим A_1, B_1, C_1 и D_1 (A_1 в грани, противолежащей вершине A). Они лежат на радикальных осях троек сфер (A_1 на радикальной оси сфер, содержащих вершины грани, противолежащей вершине A). Окружности DFJ (содержащая A_1) DIJ (содержащая B_1) и DFI (содержащая C_1) проходят через вершину D, поэтому окружности B_1C_1I (пересечение сфер A и D), A_1C_1F (пересечение сфер B и D), A_1B_1J (пересечение сфер C и D) пересекаются в одной точке O, которая принадлежит всем четырём сферам.

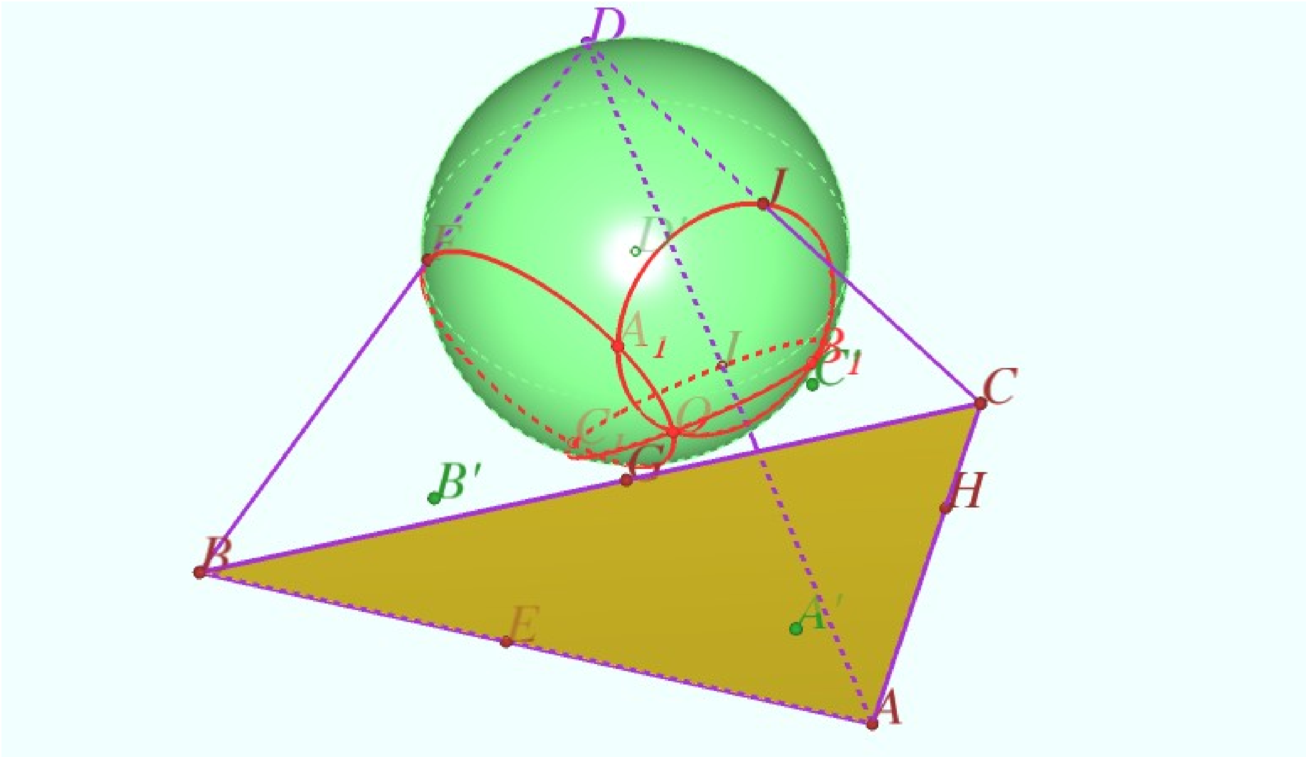


Рис 6. Точка Микеля тетраэдра

Задача 7. Луч пересекает сферу

***Задание* [2, 234]**. Прямая из точки A пересекает сферу в точках B и C. Найдите геометрическое место точек C, если точка B расположена на данной окружности DEF.

Решение. Пусть D' – это точка, в которой прямая AD второй раз пересекает сферу, точка Q – центр сферы $ADEF$, π – касательная плоскость в точке A к сфере с центром Q. Тогда известно, что отрезок CD' параллелен соответствующей касательной в плоскости π, а, значит, плоскости π. Значит, геометрическое место точек C – это пересечение данной сферы и плоскости, параллельной π.

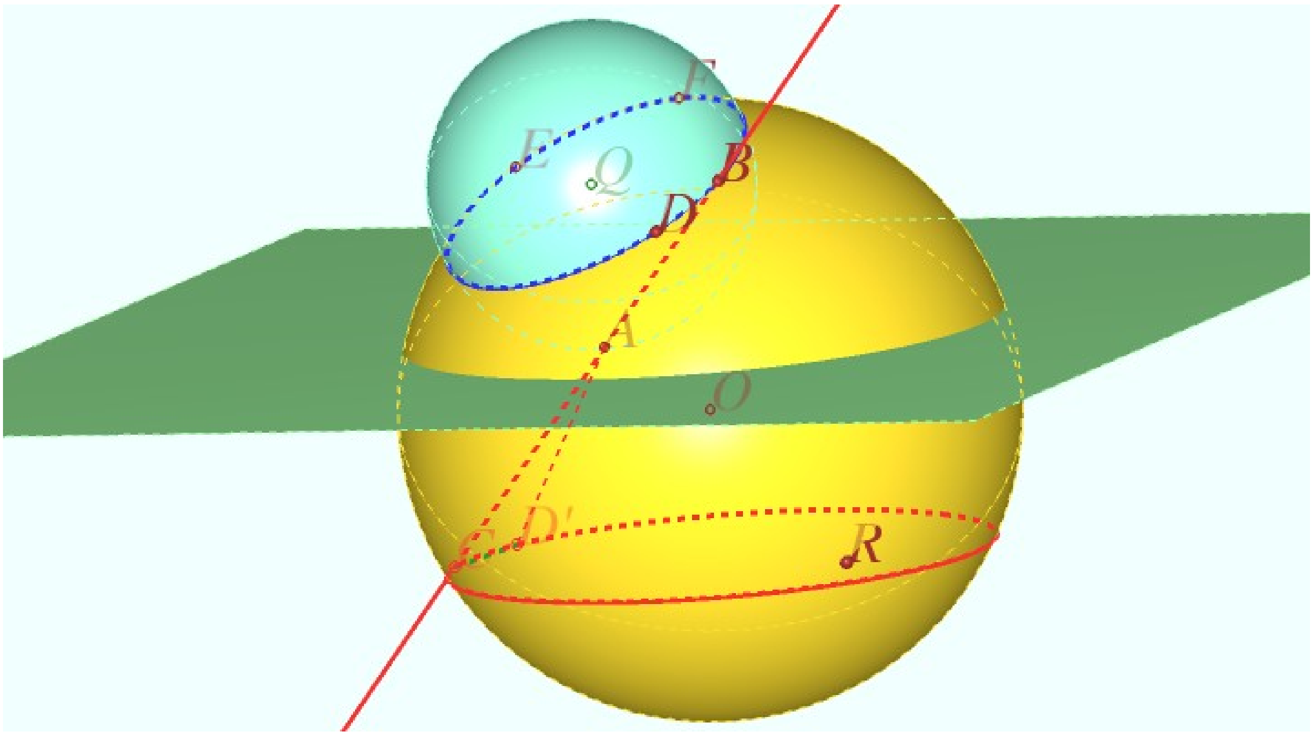


Рис 7. Луч пересекает сферу

Задача 8. Середины общих касательных к двум сферам

***Задание* [2, 291]**. Найдите геометрическое место середин общих касательных к двум заданным сферам.

Исследование. Пусть ***AB*** – это общая касательная к сферам с центрами ***O*** и ***Q***. ***C*** – середина ***AB***. Выберите положение сфер с помощью точек ***O*** и ***Q*** , радиусы сфер точками ***R*** и ***r***. Пользуясь точкой ***A,*** рассмотрите возможные положения точек ***C***.

Решение. Поскольку ***AC = BC***, то степени точек ***C*** относительно сфер одинаковы и точка располагается в радикальной плоскости сфер, которая перпендикулярна линии центров ***OQ***.

В плоской задаче расстояние от середины внешней касательной до оси

$\rho=\frac{R+r}{2}\sqrt{1-\frac{(R-r)^2}{a^2}}$, ***OQ = a***. Расстояние от середины внутренней касательной до оси

$$\rho_1=\frac{|R-r|}{2}\sqrt{1-\frac{(R+r)^2}{a^2}} .$$

Если сферы не имеют общих точек, то ***a > R + r***..При этом середина касательной может занять любое положение с расстоянием от оси в промежутке [ρ_1;ρ]. Они заполняют кольцо. Если сферы касаются, или радиусы равны, то расстояние в промежутке [0;ρ], это круг. Если сферы пересекаются, то расстояние – в промежутке от радиуса окружности пересечения до ρ.

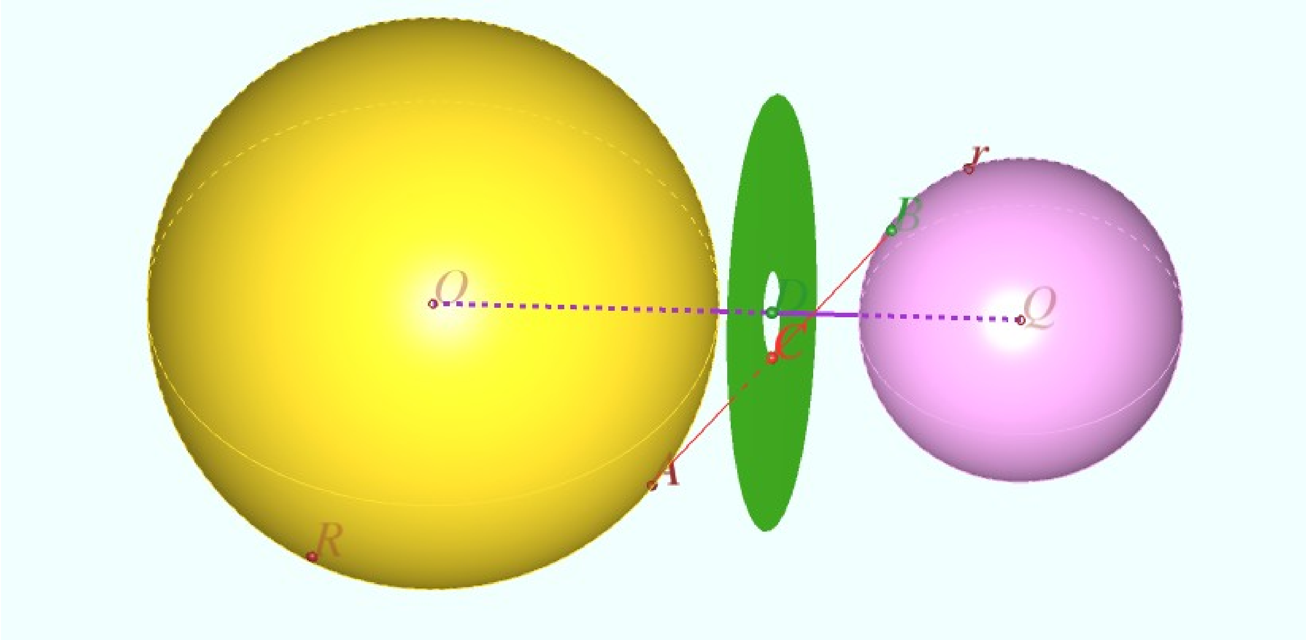


Рис 8. Середины общих касательных

Литература

1. Ж. Адамар. Элементарная геометрия: –Т.2: Стереометрия. –М.: Изд. ГУПИ. 1951. – 761 с.

2. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. Стереометрия. 10 – 11 кл.: Пособие для учащихся. – М.: Дрофа, 1998. – 272 с.

3. В. В. Прасолов. Задачи по стереометрии. –М.: Изд. МЦНМО. 2010. – 352 с.

4. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 10. –М.: МФТИ, 1996. – 256 с.

5. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 11. –М.: Физматкнига, 2005. – 336 с.

6. Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: –Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. –М.: Изд. МЦНМО. 2006. – 256 с. (Часть 1. Глава 8. Сфера. §3. с. 139 – 154.)

7. В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. –М.: «НАУКА», 1989, Библиотека математического кружка, вып. 19. – 287 с.