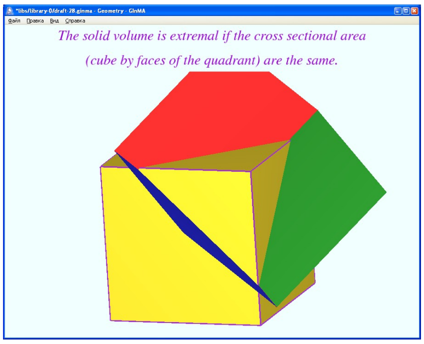
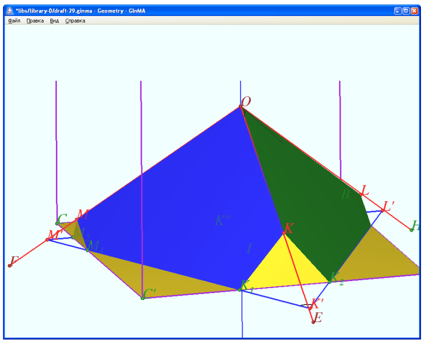
Тела пересечения многогранников

Интерактивные решения задач о пересечении многогранников: тетраэдров, куба с квадрантом, с двугранным углом, с другим кубом.

http://www.deoma-cmd.ru/

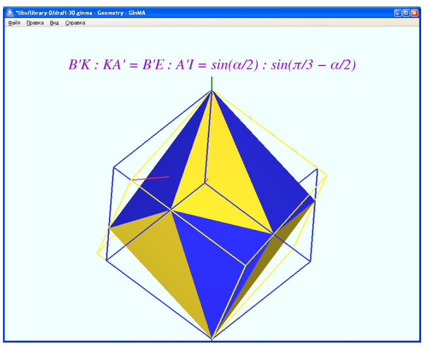
Материалы комплекта можно использовать при изучении тем «объем» и «площадь поверхности» на уроках в классе с углубленным изучением математики, для создания учебного школьного проекта или исследования, представляемого на математический конкурс. Комплект представляет решения задач, сопровождаемые интерактивными файлами, выполненными в программе GInMA. Решение сложных стереометрических задач, исследование пространственных построений с помощью интерактивных файлов углубляет понимание геометрии, развивает пространственное воображение учащихся.

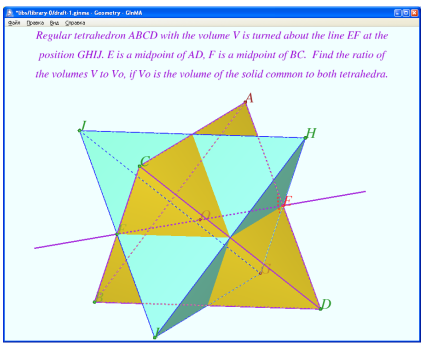


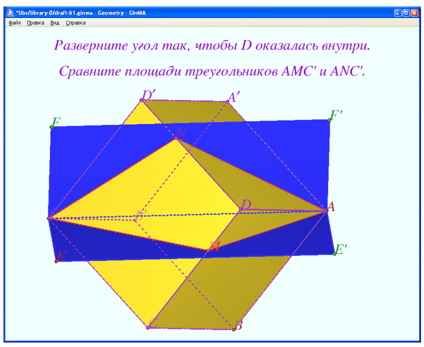


Наибольший и наименьший объём тела пересечения куба и квадранта

В комплекте выполнены интерактивные исследования тел, возникающих при пересечении многогранников. Рассматриваются задачи на построение, нахождение объема и площади поверхности общей части пересечения куба и квадранта, пересечение куба с двугранным углом, пересечение пары кубов с общей диагональю, пересечение двух правильных тетраэдров. Задачи на построение пересекающихся тел зачастую представляют собой пространственные конструкции, вызывающие трудности при попытках их просто вообразить, представить «в уме». Наглядные решения этих задач выполнены в программе GInMA.







Пересечение кубов ***Пересекающиеся тетраэдры*** ***Двугранный угол пересекает куб***

Задача 1. Двугранный угол 60° пересекает куб

Задание. Ребро двугранного угла ***α = 60°*** лежит на диагонали куба с ребром ***a***. Найдите объём части куба, заключённой внутри угла.

Исследование. Куб задают точки ***A*** и ***B***. Положение угла определяет точка ***E***. Вращая угол за точку ***E***, исследуйте конфигурацию. Разверните угол так, чтобы вершина ***D*** оказалась внутри. Сравните площади треугольников ***AMC′*** и ***ANC′***. Рассмотрите вид вдоль ***AC′***.

Решение. Рассмотрев вид вдоль ***AC′*** (правильный шестиугольник), заметим, что расстояния от ***M*** и ***N*** до прямой ***AC′*** одинаковы. Отсюда заключаем, что при любом положении угла площади треугольников ***AMC′*** и ***ANC′*** равны. При вращении угла объём, который входит в угол за счёт поворота, точно равен объёму, который выходит из угла через противоположную грань. Значит, объём части куба внутри угла постоянен. Весь куб дают шесть таких объёмов, значит $V = a^3/6$.

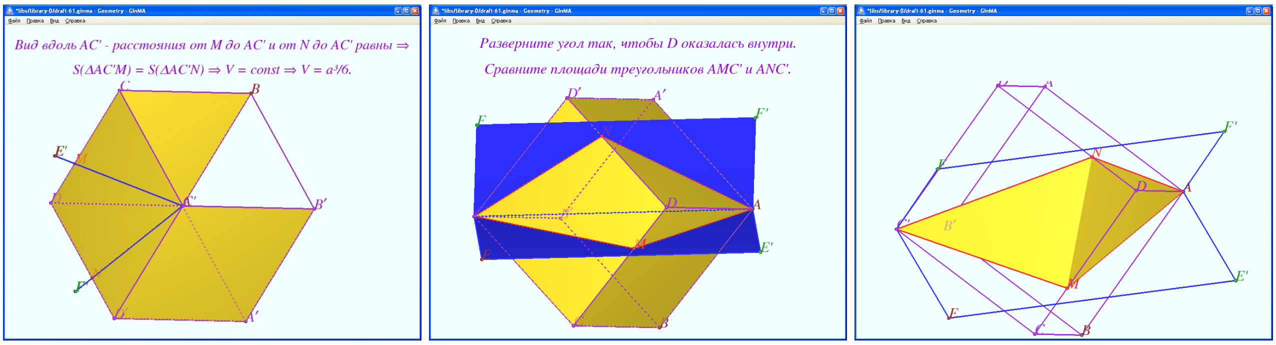


Рис 1. Двугранный угол величиной 60° пересекает куб

Задача 2. Двугранный угол величиной менее 60° пересекает куб

Задание. Ребро двугранного угла ***α < 60°*** лежит на диагонали куба с ребром ***a***. Найдите наименьший возможный объём части куба, заключённой внутри угла.

Исследование. Куб задают точки ***A*** и ***B***. Положение угла определяет точка ***E***. Вращая угол за точку ***E***, исследуйте конфигурацию. Разверните угол так, чтобы средняя часть ребра ***CD*** оказалась внутри. Сравните площади треугольников ***AMC′*** и ***ANC′***. Рассмотрите вид вдоль ребра ***AC′***.

Решение. Если при некотором положении двугранного угла объём тела пересечения экстремален (наименьший или наибольший), то при малом повороте угла в любую сторону изменение объёма должно быть нулевым. Это условие представляет собой обобщение условия равенства нулю производной гладкой функции в точке экстремума. Изменение объёма пропорционально углу поворота и площади сечения куба гранью двугранного угла. Значит, в точке экстремума площади треугольников ***AMC′*** и ***ANC′*** равны. Другими словами, если площадь одного из двух ограничивающих многоугольников больше, чем другого, то поворачивая в эту сторону, можно увеличить объём общей части.

Если площади треугольников ***AMC′*** и ***ANC′*** равны, то равны и расстояния от точек ***M*** и ***N*** до ребра ***AC′***. Рассмотрев вид вдоль ***AC′*** (правильный шестиугольник), заметим, что в этом случае $MC = ND$ и $\angle MAN = \alpha$. Проекция ребра ***NM*** на плоскость, перпендикулярную ***AC′***, равна удвоенному произведению расстояния от ***AC′*** до ***MN*** на тангенс полуугла двугранного угла $MN_1 = MN \cdot \sin(CD, AC') = 2\dfrac{a}{\sqrt{2}} tg\dfrac{\alpha}{2}$. Объём тетраэдра ***ANC′M,*** в котором $AC' = a\sqrt{3}$, расстояние между ***AC′*** и ***NM*** $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$:

$$V_{\min} = \frac{AC' \cdot \rho\,(CD, AC') \cdot MN \cdot \sin(CD, AC')}{6} = \frac{AC' \cdot h \cdot MN_1}{6} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot a\sqrt{2}tg\dfrac{\alpha}{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}tg\dfrac{\alpha}{2}}{6}.$$

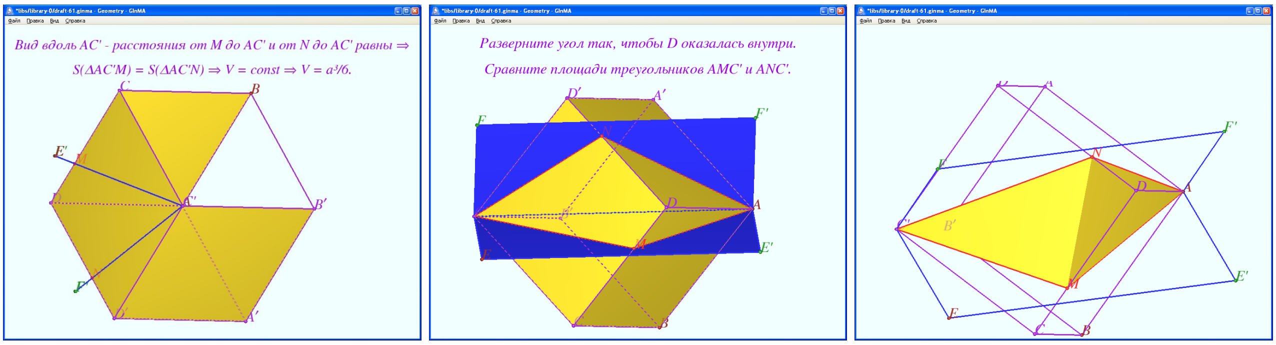


Рис 2. Двугранный угол величиной менее 60° пересекает куб

Задача 3. Двугранный угол величиной более 60°, но менее 120° пересекает куб

Задание. Ребро двугранного угла ***60° < α < 120°*** лежит на диагонали куба с ребром ***a***. Найдите наименьший возможный объём части куба, заключённой внутри угла.

Решение. Разобьём двугранный угол на две части. Одну величиной ***60°,*** другую величиной ***α°– 60°***: Наименьший объём:

$$V_{\min} = V(60^\circ) + V_{\min}(\alpha - 60^\circ) = \frac{a^3}{6} + \frac{a^3\sqrt{3}tg\dfrac{\alpha - 60^\circ}{2}}{6} = \frac{2a^3}{3(1+\sqrt{3}ctg\dfrac{\alpha}{2})}$$

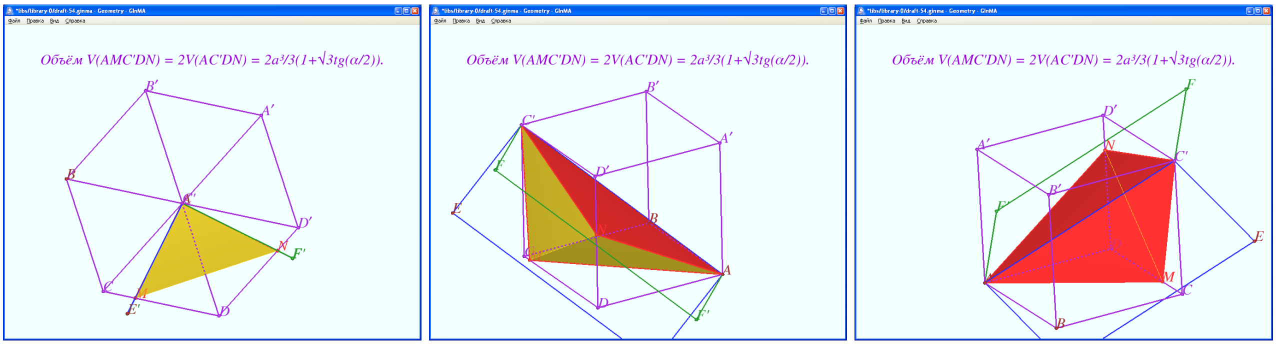


Рис. 3. Двугранный угол величиной 60° < α < 120° пересекает куб

Задача 4. Наибольший объём тела пересечения куба и квадранта с вершиной в его центре

Задание 4.1. Вершина ***O*** квадранта находится в центре единичного куба. Найдите наибольший объём части куба внутри квадранта.

Задание 4.2. Вершина ***O*** единичного куба находится в центре второго единичного куба. Найдите наибольший объём общей части кубов. (Задания эквивалентны, три грани первого куба, выходящие из точи О, эквивалентны трём граням квадранта).

Исследование. Три грани квадранта пересекают второй куб по трём многоугольникам. Если площадь одного из них больше, чем любого другого, то, поворачивая квадрант вокруг ребра пересечения этих граней в сторону большей грани, можно увеличить объём тела пересечения. Значит, объём тела пересечения может быть экстремален, только если площади сечения (куба гранями квадранта) одинаковы.

Решение. Пусть ***AK = AL = AM = 0,75AB***. Тогда ***OK⊥OL⊥OM, OK = OL = OM = AK***. Значит, ***OKLM*** – квадрант. Причём $S_{OKL} = S_{OKM} = S_{OLM}$. Поэтому тело ***OAKLM*** имеет экстремальный объём $V_{OAKLM} = \frac{9}{64} \approx 0{,}14$. Поскольку ясно, что если грани квадранта установить параллельно граням куба, то общая часть – это восьмая часть куба, то полученное значение может быть максимумом.

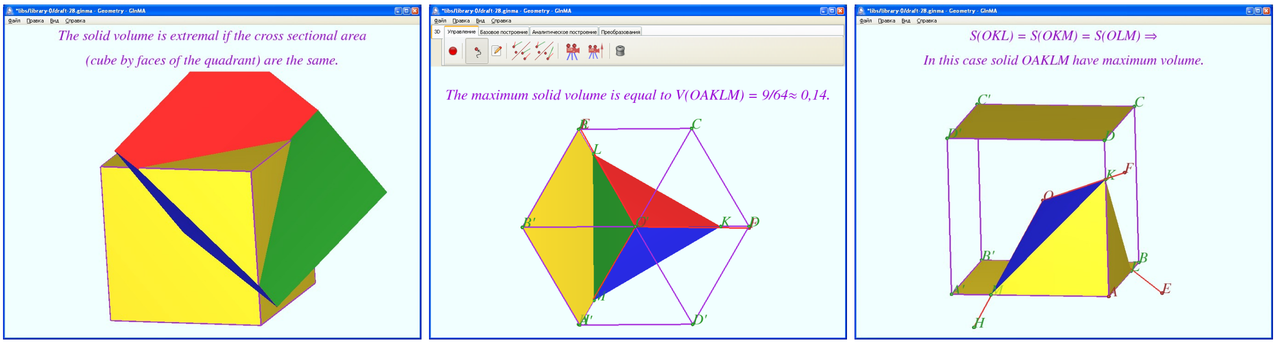


Рис 4. Наибольший объём тела пересечения куба и квадранта с вершиной в его центре

Задание 5. Наименьший объём тела пересечения куба и квадранта

Задание 5.1. Вершина ***O*** квадранта находится в центре единичного куба. Найдите наименьший объём части куба внутри квадранта.

Задание 5.2. Вершина ***O*** единичного куба находится в центре второго единичного куба. Найдите наименьший объём общей части кубов.

Решение. Пусть сторона куба равна 2, выберем грань ***CC'B'B*** в качестве базовой грани, на которой размещаем тело пересечения. Площади трёх граней пересечения равны, поэтому ребро квадранта ***OKK'*** пустим параллельно грани ***AA'B'B*** под углом **α** к плоскости ***CC'B'B.*** Точка ***K*** на грани ***A'B'C'D'***, ***K'*** в базовой грани, $OK' = \frac{1}{\sin\alpha}; OK = \frac{1}{\cos\alpha}$. Противолежащая грань квадранта пересекает базовую грань по отрезку, параллельному ***BC,*** если его середина – ***K''***, то ***OK'' = OK = K''M'***. Рёбра квадранта ***OLL'*** и ***OMM'*** пересекают грани в точках ***L*** и ***M,*** базовую плоскость в точках ***L'*** и ***M'***. $OM' = \sqrt{2}OK'' = \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}$. Объём тела ***O'K'L'M'*** равен:

$$\frac{OK' \cdot OL' \cdot OM'}{6} = \frac{1}{3\sin\alpha\,\cos^2\alpha}.$$

Пусть KK_1K_2 – это сечение тела ***O'K'L'M'*** гранью ***A'B'C'D'***. K_3 – это середина K_1K_2. Тогда

$$K'K_3 = ctg\alpha - 1, K_1K_3 = K'K_3\sin\alpha, KK_3 = K'K_3 tg\alpha, V = \frac{K'K_3 \cdot K_1K_3 \cdot KK_3}{3} = \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\,\cos\alpha}.$$

Пусть ***MM_1M_2*** – это сечение тела ***$O'K'L'M'$*** гранью ***$DCC'D'$***. Тогда $M'M_2 = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}, M_1M_2 = \frac{M'M_2}{\sin\alpha}, MM_3 = M'M_2\cos\alpha, v = \frac{M'M_2\cdot M_1M_2\cdot MM_3}{3} = \frac{(1-\cos\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$

Искомый объём $V = \frac{1}{3\sin\alpha\cos^2\alpha} - \frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{(1-\cos\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$

Наименьшее значение $V = \frac{205\sqrt{2}}{714} - \frac{857}{2856} \approx 0{,}106$ достигается при

$tg\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos\alpha = \frac{3+8\sqrt{2}}{17}$, ***$\alpha \approx 32{,}65°$***. Заметим, что биссектор квадранта наклонен к

базовой плоскости под углом $2arctg(1-\frac{1}{\sqrt{2}}) + \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 87{,}4°$ (не перпендикулярен к ней).

Вычислить это значение численно не просто. Простое уравнение для поиска угла получим, если приравняем площади граней возникшего тела. Площадь грани ***OLM*** $S_1 = \frac{2}{\cos\alpha} - 1$. Площади равных граней ***OKL (OKM)*** найдём, вычитая из площади треугольника ***OK'M'*** $S_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}$ площади треугольников ***$MM'M_1$*** $S_{21} = \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}$ и ***$KK'K_1$*** $S_{22} = \frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}$. Приравняв площади, находим уравнение:

$$\frac{2}{\cos\alpha} - 1 = \sqrt{2} - \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Пользуясь стандартной заменой $t = tg\frac{\alpha}{2}$, преобразуем уравнение и найдём его единственный положительный корень:

$$\sqrt{2}t^3 + (3+\sqrt{2})t^2 - \sqrt{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

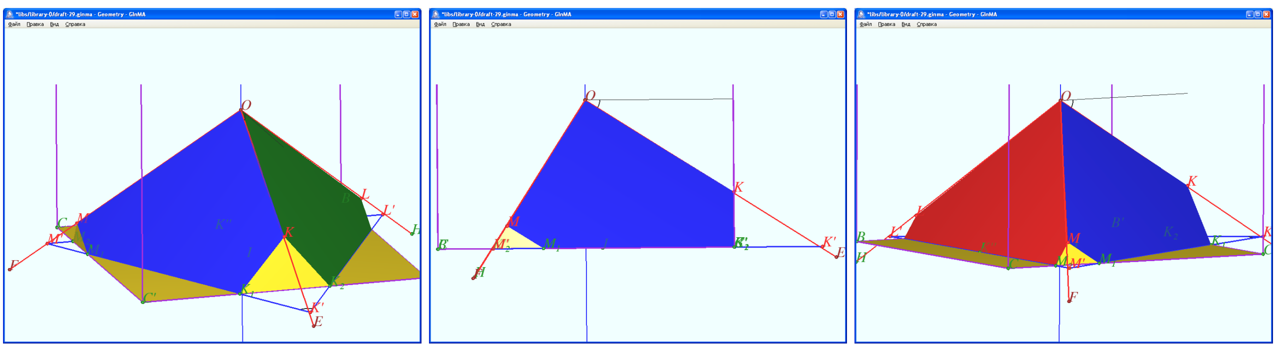


Рис 5. Наименьший объём тела пересечения куба и квадранта с вершиной в его центре

Задание 6. Пересечение кубов с общей диагональю

Задание 6.1 **[1, 156]..** Куб повернули вокруг диагонали на угол α. Найдите отношение объёма тела пересечения к объёму исходного куба.

Исследование. Установите удобный размер (точка ***A***) и положение (точка ***O***) системы кубов. Вращая синий куб с помощью точки ***E***, изучите конфигурацию. Размещайте ***E*** между ***B'*** и ***D'***.

Решение. Пусть желтый куб с ребром ***a*** неподвижен, ***Q*** – проекция вершины ***E*** вращающегося синего куба на ось вращения ***AC'***, угол поворота синего куба ***B'QE*** $= \alpha$. Заметим, что расстояния от таких вершин, как ***A',B',E*** и ***I*** до оси одинаковы (обозначим c), угол поворота от ***A'*** до ***I*** равен $\frac{2}{3}\pi - \alpha$. Отрезки ***A'I*** и ***B'E*** параллельны, причём $B'E = 2c\sin\frac{\alpha}{2}; A'I = 2c\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2})$. Каждая точка пересечения рёбер разных кубов делит ребра в одинаковом отношении. Например, ***K*** – точка пересечения рёбер ***A'B'*** жёлтого куба и ***EI*** синего куба делится в отношении $B'K : A'K = B'E : A'I = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2})$. При этом $\frac{B'K}{A'B'} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2})} = t$. Пирамида ***EKRC'*** имеет прямой трёхгранный угол и выходящие из него рёбра, равные ***at, a, a – at***. Объём пирамиды ***EKRC'*** (и ещё 12 равных её пирамид) $v = \frac{a^3 t(1-t)}{6}$. От синего куба отрезаны шесть таких пирамид и объём оставшейся части, которая и является телом пересечения, $V = a^3 - \frac{6a^3 t(1-t)}{6} = a^3(1 - t + t^2)$. Выполнив преобразования, найдем отношение $\frac{V}{V_0} = \frac{1{,}5}{1 + \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})}$. Относительный объём принимает наибольшее значение 1 при $\alpha = 0$ и наименьшее 0,75 при $\alpha = \pi/3$.

Задание 6.2. Куб повернули вокруг диагонали на угол α. Найдите отношение, в котором грань одного куба делит диагональ другого, отличную от оси вращения.

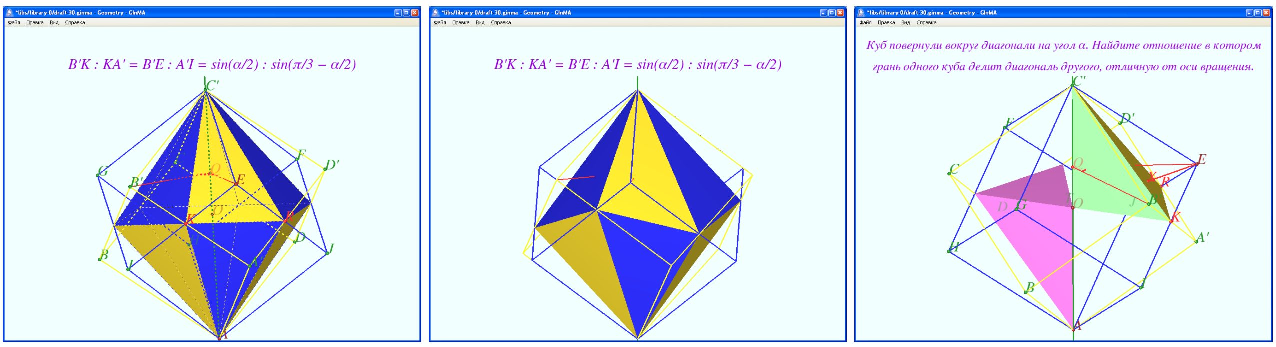


Рис 6. Пересечение кубов с общей диагональю

Задание 7. Пересечение кубов с общим центром

Задание. Два равных куба имеют общий центр. Докажите, что объём тела пересечения превышает половину объёма исходного куба. Найдите наименьший объём тела пересечения.

Исследование. Установите удобный размер (точка ***A***) и положение (точка ***O***) системы кубов. Вращая голубой куб с помощью точки ***E***, изучите конфигурацию.

Решение. Сфера с центром в общем центре кубов и диаметром равным стороне куба имеет объём $\frac{\pi a^3}{6} > \frac{a^3}{2}$ и расположена внутри общей части кубов.

Задание 8. Пересекающиеся правильные тетраэдры

***Задание* [1, 155]**. Правильный тетраэдр повернули вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся рёбер**,** на угол α. Найдите отношение объёма исходного тетраэдра к объёму общей части тетраэдров.

Исследование. Правильный тетраэдр ***ABCD*** повернули вокруг прямой ***EF*** (***E*** – середина ***AD, F – BC***) на угол ***∠AEG*** = α в положение ***GHIJ***. Установите удобный размер (точка ***A***) и положение (точка ***O***) системы кубов. Вращая голубой тетраэдр с помощью точки ***G***, изучите конфигурацию.

Решение. Пусть ***AB = a, O*** – общий центр тетраэдров, ***Q*** – точка пересечения ***AO*** и грани ***GHJ***. Пользуясь видом вдоль ***GH***, найдём ***AQ : QO***. Проекция ***AE*** на эту плоскость:

$$(AE) = 0{,}5a \sin\alpha,\ JF = 0{,}5a.\ AQ : QO = AG : 0{,}5JF = 2 \sin\alpha.$$

Сравнивая объёмы отрезанной от тетраэдра ***ABCD*** части и тела пересечения обнаружим, что отрезано четыре тетраэдра, равных ***ALEN***, а внутри тела пересечения осталось восемь тетраэдров, равных ***OLEN***. Основание у тетраэдров ***ALEN*** и ***OLEN*** общее, поэтому отношение объёмов равно ***AQ : QO.*** Значит, отношение объёма отрезанной части к оставшейся $V_{ALEN} : 2V_{OLEN} = AQ : 2QO = \sin\alpha$. Объём тетраэдра ***ABCD*** складывается из объёма общей и отрезанной частей, $V : Vo = 1 + (V - Vo)/Vo = 1 + \sin\alpha$. Наименьший объём тела пересечения равен половине исходного при α = 90°.

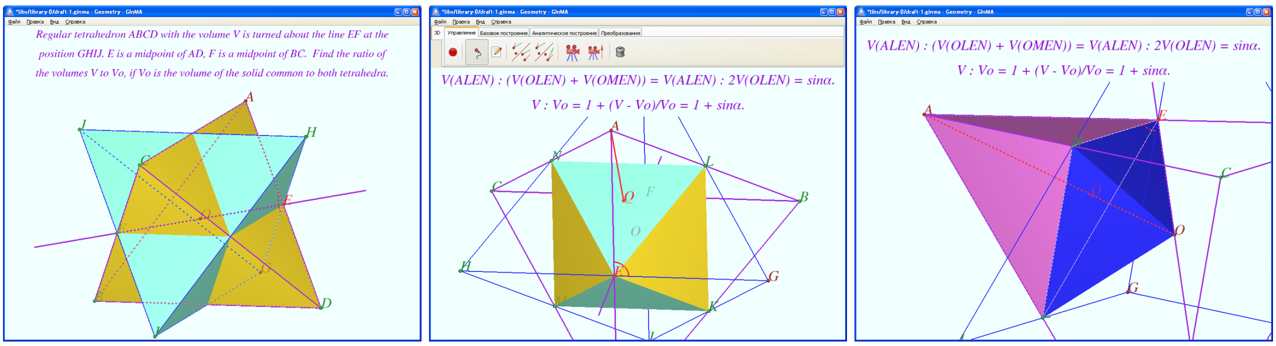


Рис 7. Пересекающиеся правильные тетраэдры

Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. Стереометрия. 10 – 11 кл.: Пособие для учащихся. – М.: Дрофа, 1998. – 272 с.

2. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 10. –М.: МФТИ, 1996. – 256 с. (6. Элементы теории многогранников).