Метод допустимых вариаций для поиска экстремума

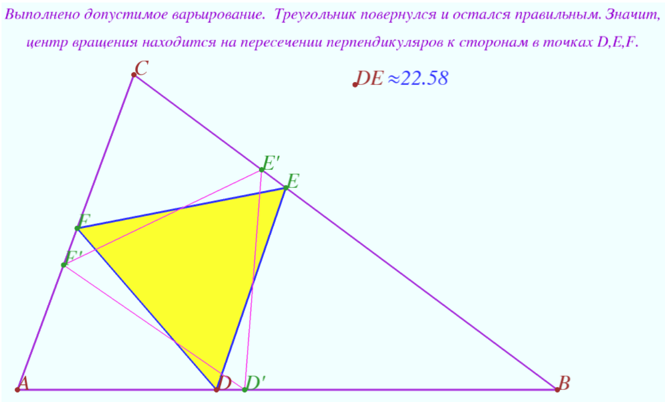
Книга: Экстремумы

Интерактивные решения задач о поиске наибольших и наименьших расстояний,

периметров, площадей, объёмов тел.

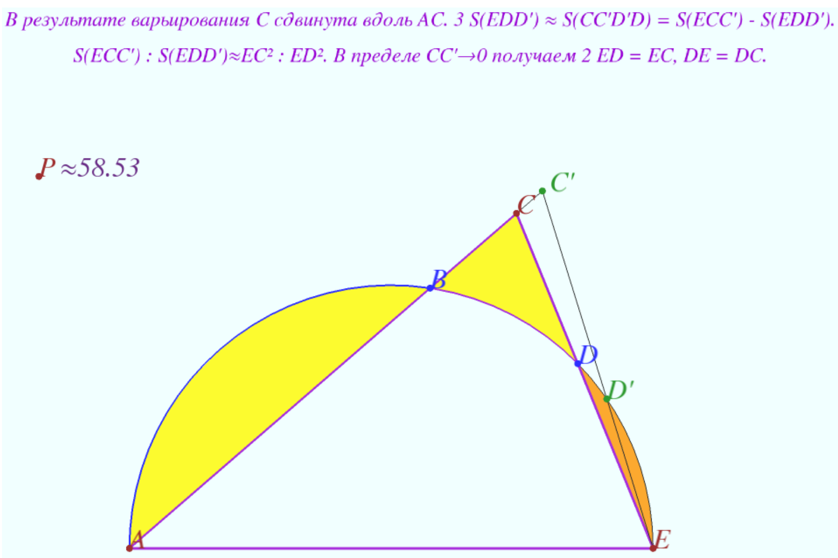
http://www.deoma-cmd.ru/

Материалы комплекта можно использовать на уроках в классе с углубленным изучением математики, для создания учебного школьного проекта или исследования, представляемого на математический конкурс. Материалы можно использовать для индивидуального изучения методов поиска экстремальных решений.



Варьирование правильного треугольника, вписанного в данный

Комплект представляет решения задач, сопровождаемые интерактивными файлами, выполненными в программе GInMA. Исследуем применение метода допустимых вариаций. Верифицируем решения, пользуясь возможностями интерактивной программы.



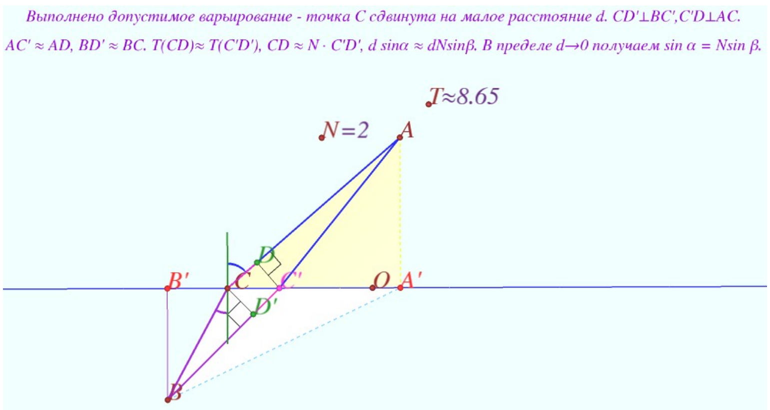
Допустимое варьирование при минимизации стоимости участка

Метод допустимых вариаций

Типичная геометрическая задача на поиск экстремума содержит геометрический объект, накладываемые на него условия и некоторую функцию объекта, экстремум которой необходимо найти. Например, объект — отрезок, ограничения — его концы располагаются на сторонах данного угла и он содержит данную точку, функция — длина отрезка, минимум которой и соответствующее положение отрезка требуется найти. Алгебраический метод решения требует параметризации задачи, записи функции в виде выражения от параметра, дифференцирования этого выражения, приравнивания нулю первой производной и исследования знака второй производной. Для типичных геометрических задач такой метод ведёт к алгебраическим выражениям, которые современные компьютеры в общем виде решить не могут. Пример такой задачи: вписать в произвольный треугольник равносторонний треугольник с минимальной длиной стороны.

Метод допустимых вариаций основан на приравнивании нулю первой производной исследуемой функции. Другими словами, если немного изменить параметр, то функция практически не изменится. Если какая-то её часть возрастёт, то другая на столько же уменьшится. Чтобы получить условие экстремума, выполняем малое изменение параметра, находим изменение функции, пропорциональное изменению параметра, и приравниваем его нулю. Метод можно обобщить на случай функции многих переменных. Каждую переменную по очереди считаем единственной изменяемой величиной, а все остальные считаем постоянными. Заметим, что все возникающие равенства для конечного изменения параметра являются приближёнными. Но при переходе к пределу с нулевым изменением параметра они становятся точными.

Общая схема решения следующая. Предполагаем, что объект найден. Часто для этого формулируем рабочую гипотезу о его свойствах. Производим так называемую «допустимую вариацию» исследуемого объекта, то есть его изменение при котором объект продолжает удовлетворять условиям задачи, но занимает слегка изменённое положение. Если в результате такого движения оказывается, что параметр объекта можно изменить в требуемом направлении, то делаем вывод, что гипотеза неверная и ищем новую гипотезу. В противном случае используем утверждение Исаака Ньютона: «Когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течёт ни вперёд, ни назад». То есть при такой вариации исследуемая величина *сохраняет значение*. Вытекающее из этого утверждения равенство и является критерием экстремальности.



Варьирование пути через границу сред с наименьшим временем

Задача 1. Отрезок и прямой угол

Задание. Отрезок *AB* имеет концы на сторонах прямого угла с вершиной (0, 0) и содержит точку $C(x_{0,}\, y_0)$. Найдите наименьшую длину такого отрезка.

Решение. Пусть вершина прямого угла в точке *O*, искомый отрезок занял положение *AB*, причём $\angle OAB = \alpha$. Его концы на сторонах угла, а точка $C(x_{0,}\, y_0)$ лежит на нём. Осуществим допустимую вариацию, то есть повернём отрезок вокруг точки *C* на очень малый угол $d\varphi$ в новое положение *A'B'*. Длина отрезка слегка изменилась. Она возросла на участке ниже *C* *A'C* > *AC*, но уменьшилась на отрезке выше *C*: *CB'* < *CB*. Определяем эти изменения длины и приравниваем их – только в этом случае длины исходного и проварьированного отрезков могут быть равны. Опустим перпендикуляр из *A* на *A'B'* ($AD \perp A'B'$) и из *B'* на *A'B'* ($B'D' \perp AB$). Известно, что в прямоугольном треугольнике с малым углом прилежащий к углу катет и гипотенуза отличаются на величину порядка квадрата угла, то есть в линейном приближении они равны: *B'C* ≈ *D'C* , *AC* ≈ *CD'*. Для малых углов поворота $d\varphi$ можно считать, что:

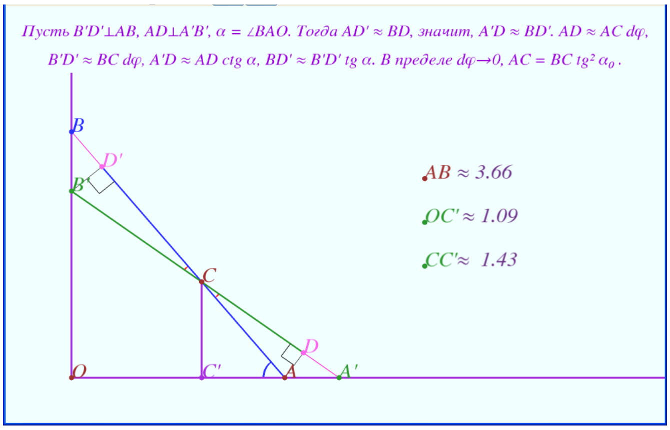
$$B'D' \approx B'C \cdot d\varphi \,,\, AD \approx AC \cdot d\varphi$$

Отрезок не изменил длину, значит: *AB* ≈ *A'B'*; *B'D'* ≈ *AD*:

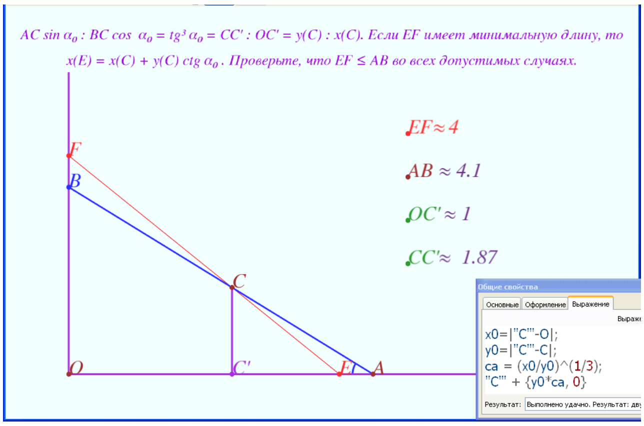
$$A'D \approx AD\, ctg\,\alpha \,,\, BD' \approx B'D'\, tg\,\alpha \to BC\, d\varphi\, tg\,\alpha \approx AC\, d\varphi\, ctg\,\alpha \,.$$

В пределе $d\varphi \to 0$ получаем условие экстремума: $BC\, tg^2\alpha = AC$. Знак равенства стал точным благодаря предельному переходу. Далее:

$$\frac{BC \cdot \sin\alpha}{AC \cdot \cos\alpha} = tg^3\alpha = \frac{y_0}{x_0}\,;\, x_A = x_0 + y_0\, ctg\,\alpha = x_0 + x_0^{1/3} y_0^{2/3}\,;\, AB^{2/3} = x_0^{2/3} + y_0^{2/3}\,.$$



Варьирование отрезка



Кратчайший отрезок внутри прямого угла

Задача 2. Отрезок и острый угол

Задание. Точка *D* находится внутри угла *A*. Концы отрезка *BC*, проходящего через точку *D* расположены на сторонах угла. Найдите отрезок наименьшей длины.

Исследование. Задайте угол, пользуясь точками *A* и B_0, определите точку *D* . Двигайте отрезок за точку *C*. Найдите наименьшую длину при выбранных параметрах задачи.

Решение. Осуществим допустимую вариацию, то есть повернём отрезок вокруг точки D на очень малый угол $d\varphi$ в новое положение $B'C'$. Длина отрезка слегка изменилась. Она возросла на участке ниже D $DC' > DC$, но уменьшилась на отрезке выше D: $DB' < BD$. Определяем эти изменения длины и приравниваем их. Опустим перпендикуляр из C на $B'C'$ ($CG \perp B'C'$) и из B на $B'C'$ ($BG' \perp A'B'$). Известно, что в прямоугольном треугольнике с малым углом прилежащий к углу катет и гипотенуза отличаются на величину порядка квадрата угла, то есть в линейном приближении они равны: $BD \approx DG'$, $DC \approx DG$. Для малых углов поворота $d\varphi$ можно считать, что:

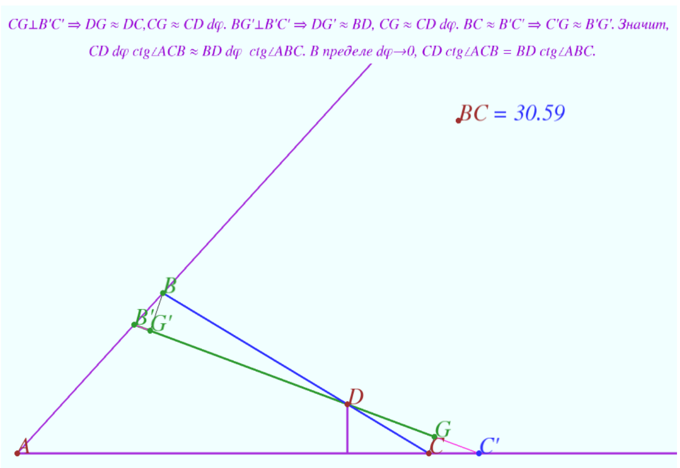
$$BG' \approx BD \cdot d\varphi \, , CG \approx CD \cdot d\varphi$$

Отрезок не изменил длину, значит: $BC \approx B'C'$; $C'G \approx B'G'$.

$$C'G \approx CG \, ctg \angle ACB \, , B'G' \approx BG' ctg \angle ABC \rightarrow CD \, d\varphi \, ctg \angle ACB \approx BD \, d\varphi \, ctg \angle ABC \, .$$

В пределе $d\varphi \rightarrow 0$ получаем условие экстремума: $CD \, ctg \angle ACB = BD \, ctg \angle ABC$.

Выполнив необходимые преобразования, найдём уравнение для поиска кратчайшего отрезка EF. Пусть $\alpha = \angle A \, , \beta = \angle DEA \, , \gamma = \angle DEA \, , \alpha + \beta + \gamma = \pi \, . a(b)$ – расстояние от D до AE(AF). Тогда условие примет вид $a \sin^2 \gamma \cos \beta = b \sin^2 \beta \cos \gamma \, , \beta + \gamma = \pi - \alpha$. Система сводится к кубическому уравнению для $\cos^2 \beta$ Решив эту систему, найдём $x_E - x_D = a \, ctg \, \beta$. Вычисления выполнены в аналитическом сервисе программы GinMA. Геометрическая трактовка полученного результата – следующая. Если H – это точка пересечения перпендикуляров к сторонам угла в точках F и E, то $HD \perp EF$.



Варьирование отрезка

Кратчайший отрезок внутри острого угла

Задача 3. Ломаная наименьшей длины с заданным наклоном одного звена

Задание. Точка D находится внутри угла A. Концы отрезка BC, проходящего через точку D расположены на сторонах угла. Найдите такое положение BC при котором $AB + BC$ минимально.

Исследование. Задайте угол, пользуясь точками A и B_0 , определите точку D . Двигайте отрезок за точку C. Найдите наименьшую длину ломаной при выбранных параметрах задачи.

Решение. Осуществим допустимую вариацию, то есть повернём отрезок вокруг точки D на очень малый угол $d\varphi$ в новое положение $B'C'$. Длина отрезка слегка изменилась. Она возросла на участке ниже D $DC' > DC$, но уменьшилась на отрезке выше D: $DB' < BD$. Определяем эти изменения длины и приравниваем их. Опустим перпендикуляр из C на $B'C'$ ($CG \perp B'C'$) и из B на $B'C'$ ($BG' \perp A'B'$). В линейном приближении равны катеты и гипотенузы: $BD \approx DG'$, $DC \approx DG$. Для малых углов поворота $d\varphi$ можно считать, что:

$$BG' \approx BD \cdot d\varphi \,, CG \approx CD \cdot d\varphi$$

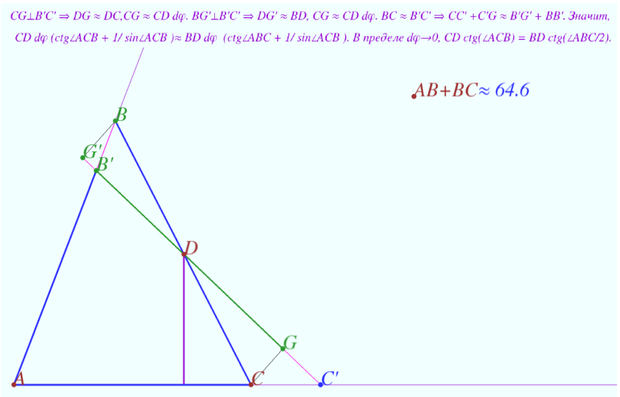
Сумма длин отрезков AB и BC в точке экстремума не изменилась, значит: $C'G \approx B'G' + BB'$.

$$C'G \approx CG\, ctg\angle ACB \,, B'G' \approx BG'\, ctg\angle ABC \,, B'B \approx \frac{BG'}{\sin\angle ABC}$$

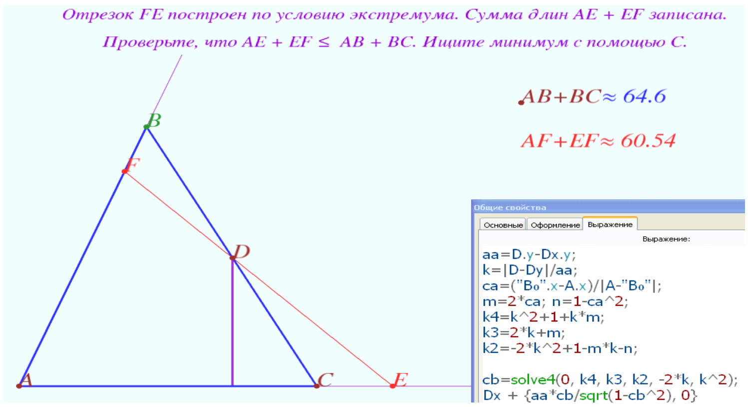
$CD\, d\varphi\, ctg\angle ACB \approx BD\, d\varphi\, ctg\frac{\angle ABC}{2}$. В пределе $d\varphi \to 0$ получаем условие экстремума:

$$CD\, ctg\angle ACB = BD\, ctg\frac{\angle ABC}{2}.$$

Выполнив необходимые преобразования, найдём уравнение для поиска кратчайшего отрезка EF. Пусть $\alpha = \angle A, \beta = \angle DEA, \gamma = \angle DEA, \alpha + \beta + \gamma = \pi$. $a(b)$ – расстояние от D до AE(AF). Тогда условие примет вид $a(1 - \cos\gamma)\cos\beta = b\sin^2\beta, \beta + \gamma = \pi - \alpha$. Система сводится к уравнению четвёртой степени для $\cos\beta$ Решив эту систему, найдём $x_E - x_D = a\, ctg\,\beta$. Вычисления выполнены в аналитическом сервисе программы GinMA. Геометрическая трактовка полученного результата – следующая. Если G лежит на пересечении биссектрисы FG внешнего угла F и перпендикуляра к AE в E, то $DG \perp EF$.



Варьирование ломаной



Кратчайшая ломаная AE + EF, наклон AB задан

Задача 4. Двузвенная ломаная наименьшей длины

Задание. Даны отрезки $AC \perp AB$ и $BD \perp AB$. Концы F и G ломаной FEG лежат на прямой AB, C на FE, D на EG. Найдите такую точку E, чтобы суммарная длина $EF+EG$ была наименьшей. Принято, что $AB = 1$.

Исследование. Задайте конфигурацию, пользуясь точками A, B, C и D. Двигайте точку E. Найдите наименьшую длину ломаной при выбранных параметрах задачи.

Решение. Введём обозначения $AC = h_1, BD = h_2, \alpha = \angle EGB, \beta = \angle EFA, \gamma = \angle FEG$. $FC = l_1, CE = l_2, ED = L_2, DG = L_1, AB = 1, k = \frac{h_1}{h_2}, m = \frac{1}{h_2}$. При этом $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Предположим, что искомая конфигурация имеет изображённый на рисунке вид. Осуществим допустимую вариацию, повернём отрезок *EF* вокруг точки *C* на очень малый угол. В результате получаем первое условие экстремума: $tg(\frac{\alpha+\beta}{2})=ctg\,\beta\,\frac{l_1}{l_2}$. Осуществим другую допустимую вариацию, повернём отрезок *EG* вокруг точки *D* на очень малый угол. В результате получаем второе условие экстремума: $tg(\frac{\alpha+\beta}{2})=ctg\,\alpha\,\frac{L_1}{L_2}$. . Запишем систему уравнений из двух найденных и следующих очевидных: $l_1\sin\beta=h_1$, $L_1\sin\alpha=h_2$, $h_1+l_2\sin\beta=h_2+L_2\sin\alpha$, $l_2\cos\beta+L_2\cos\alpha=1$. Выполняем преобразования $l_1=\frac{h_1}{\sin}\beta$, $L_1=\frac{h_2}{\sin}\alpha$, $l_2=h_1\frac{(h_2-h_1)\,tg\,\alpha}{\sin\beta(h_1 tg\,\alpha-h_2 tg\,\beta)}$,

$$L_2=h_2\frac{(h_2-h_1)\,tg\,\beta}{\sin\alpha(h_1 tg\,\alpha-h_2 tg\,\beta)}. \qquad tg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{h_1 ctg\,\beta-h_2 ctg\,\alpha}{h_2-h_1}.$$

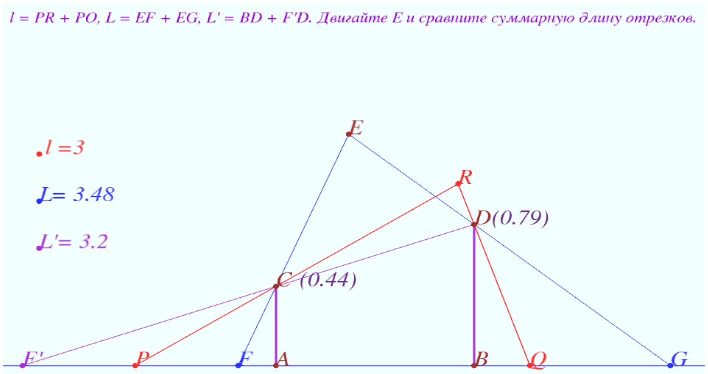
$$h_1(tg\frac{\alpha+\beta}{2}+ctg\,\beta)=h_2(tg\frac{\alpha+\beta}{2}+ctg\,\alpha) \qquad h_1\sin\alpha\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=h_2\sin\beta\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$\frac{h_1}{\sin\beta}=\frac{h_2}{\sin\alpha}$ Это уравнение указывает на любопытную особенность экстремальной конфигурации — равны отрезки *FC* = *DG*. Далее $\frac{1}{h_2-h_1}=\frac{h_1 ctg^2\beta+h_2 ctg^2\alpha}{h_1 ctg\,\beta-h_2 ctg\,\alpha}$.

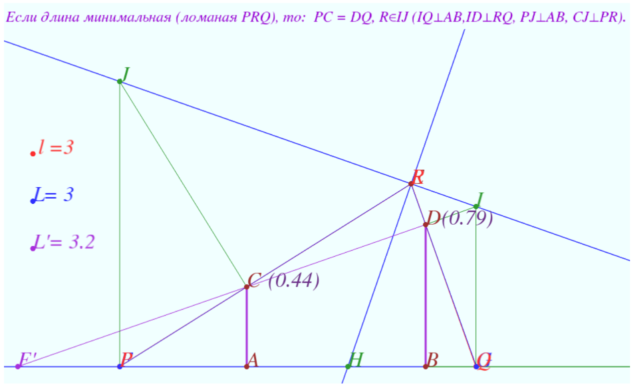
$\frac{h_1}{\sin\beta}=\frac{h_2}{\sin\alpha}\rightarrow h_1^2(ctg^2\beta+1)=h_2^2(ctg^2\alpha+1)$. Пользуясь $v=ctg\,\beta$ запишем итоговое уравнение

$k^2(1-k^2)v^4-2mk^2v^3-2k(1-k)(1-k^2)v^2+2mk(1-k)v+m^2+(1-k)^2(1-k^2)=0$. Решив это уравнение с помощью аналитического сервиса программы GinMA, получаем возможность построить конфигурацию с минимальной суммарной длиной отрезков. Геометрическая трактовка условий экстремума такова. Если *PRQ* кратчайшая ломаная, то *PC* = *DQ* и точка *R* лежит на отрезке *IJ,* где *I* это точка пересечения перпендикуляров *IQ*⊥*AB, ID*⊥*RQ, J* это точка пересечения перпендикуляров *PJ*⊥*AB, CJ*⊥*PR*.

Решение задачи построения ломаной с кратчайшей длиной может быть и другим. Ломаная может иметь вид *F'DB*, причём *C* лежит на *F'D*. В каждом конкретном случае необходимо сравнить два найденных экстремума и выбрать из них тот, у которого суммарная длина меньше. Метод допустимых вариаций не даёт достаточного условия экстремума.



Кратчайшая ломаная PR + RQ



Геометрическая трактовка экстремума

Задача 5. Трёхзвенная ломаная наименьшей длины

Задание. Даны отрезки $AA'\perp AB$, $BB'\perp AB$ и $CC'\perp AB$. Концы D и G ломаной $DEFG$ лежат на прямой AB, A' на DE, B' на EF, C' на FG. Найдите такие точки E и F, чтобы суммарная длина $DE + EF+FG$ была наименьшей.

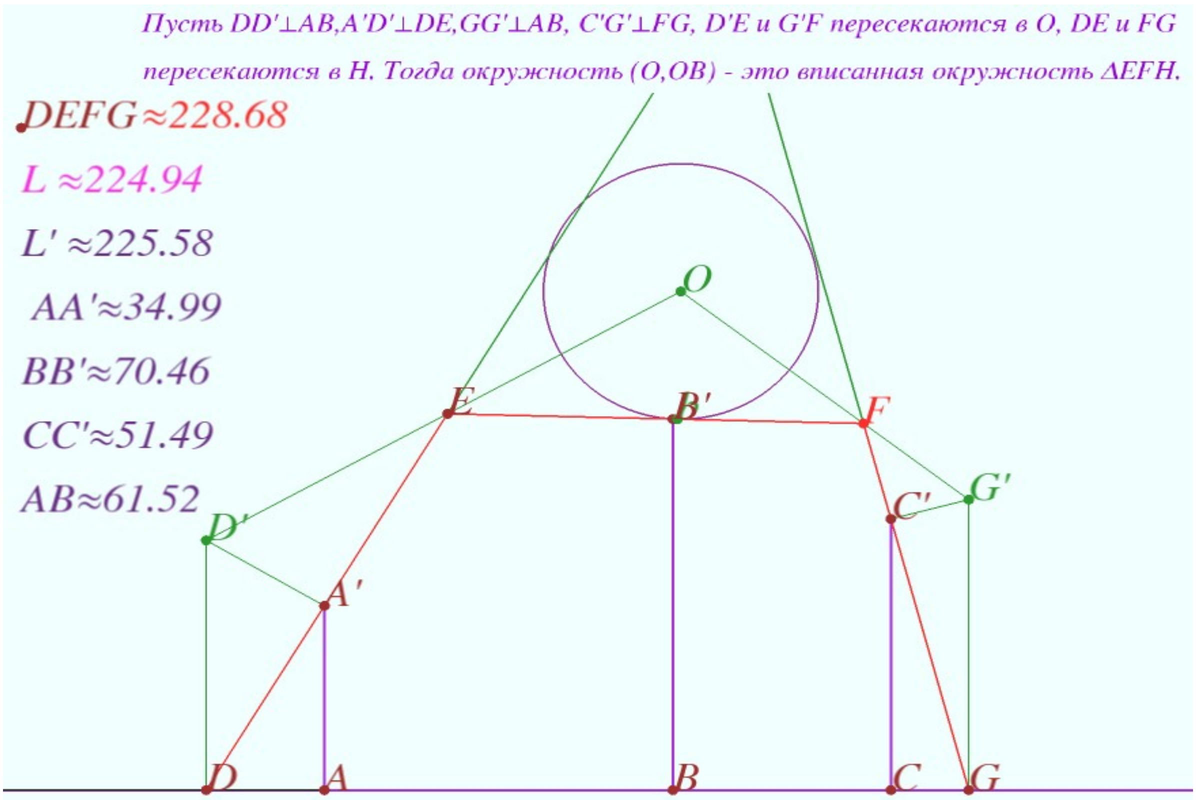
Исследование. Задайте конфигурацию, пользуясь точками A,A',B,B',C и C'. Двигайте точки E и F. Найдите наименьшую длину ломаной при выбранных параметрах задачи.

Решение. Обозначим $AA'=h_1<h_2=CC', AA<BB'=h_0$ $AB=d<D=AC=100$. Кажется очевидным, что возможны четыре ситуации в которых может быть достигнуто искомое минимальное значение длины ломаной.

1. Пусть DE не параллельно AA', FG не параллельно CC'. Wei-Chi Yang показал ([]), что в этом случае длина не может быть минимальной. Однако, локальный экстремум может иметь место. Обозначим $\alpha=\angle CGC', \beta=\angle(EF)(AC), \gamma=\angle ADA'$. Пользуясь методом допустимых вариаций найдём условия экстремума:

$$tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{GC'}{FC'}ctg\,\alpha, \quad tg\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)=\frac{EA'}{DA'}ctg\,\gamma, \quad EB'ctg\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)=FB'ctg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

На рисунке показана геометрическая интерпретация экстремальной конфигурации. Пусть $DD'\perp AB$, $A'D'\perp DE$, $GG'\perp AB$, $C'G'\perp FG$, $D'E$ и $G'F$ пересекаются в точке O, DE и FG пересекаются в H. Тогда окружность (O,OB) должна быть вписанной окружностью треугольника EFH.



Геометрическая трактовка локального экстремума длины трёхзвенной ломаной

2. Пусть DE параллельно AA', FG не параллельно CC'. Задача свелась к задаче о кратчайшей ломаной с заданным наклоном одного звена. Обозначим

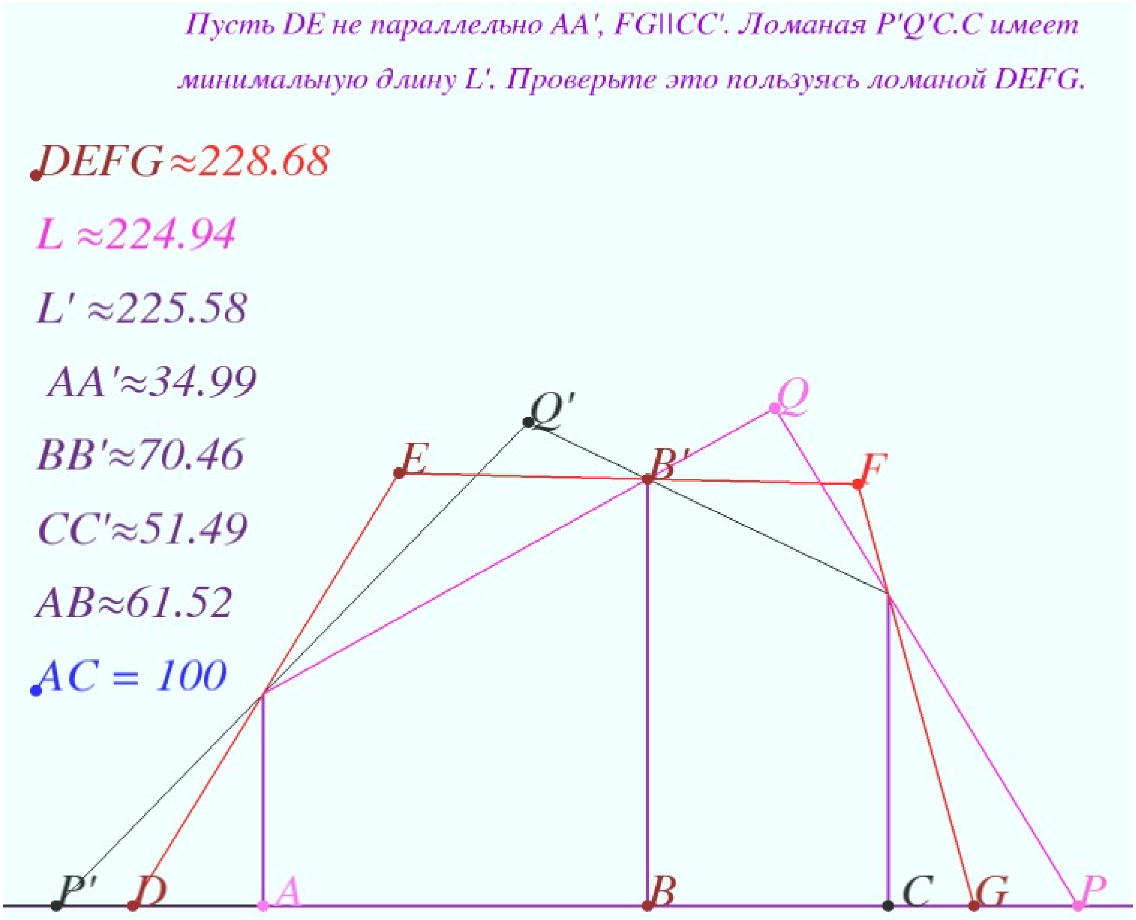
$A'B'=l_1, QB'=l_2, QC'=L_2, PC'=L_1, \alpha=\angle APQ, \beta$ угол между QA' и AB.

$ctg\,\beta=\dfrac{AB}{BB'-AA'}$, $AC=100, k=\dfrac{BC+(BB'-CC')ctg\,\beta}{CC}$ ', $v=ctg\,\alpha$. Метод вариаций даёт условие s $tg\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\dfrac{L_1}{L_2}ctg\,\alpha$. Система уравнений

$L_1\sin\alpha=h_2, h_0+l_2\sin\beta=h_2+L_2\sin\alpha, l_2\cos\beta+L_2\cos\alpha=BC, tg\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{L_1}{L_2}ctg\,\alpha$. Выражая всё через $v=ctg\,\alpha$ получим $v^4+2ctg\,\beta\,v^3+ctg\,\beta\,(ctg\,\beta+2k)v^2-2kv-k^2=0$.

3. Пусть *DE* не параллельно *AA', FG* параллельно *CC'*. Решение аналогично рассмотренному выше с точностью до замены обозначений.

4. Пусть *DE* параллельно *AA', FG* параллельно *CC'*. Задача свелась к построению трапеции.



Ломаная AA'QP имеет наименьшую длину среди ломаных с вертикальной AA'.
Ломаная P'Q'C'C имеет наименьшую длину среди ломаных с вертикальной CC'.

Задача 6. Треугольник наименьшей наименьшего периметра с данным углом

Задание. Точка *D* находится внутри угла *A*. Концы отрезка *BC*, проходящего через точку *D* расположены на сторонах угла. Найдите такое положение *BC* при котором периметр треугольника *ABC* наименьший.

Исследование. Задайте конфигурацию, пользуясь точками A, B_0 и *D*. Двигайте точку *C*. Найдите наименьший периметр при выбранных параметрах задачи.

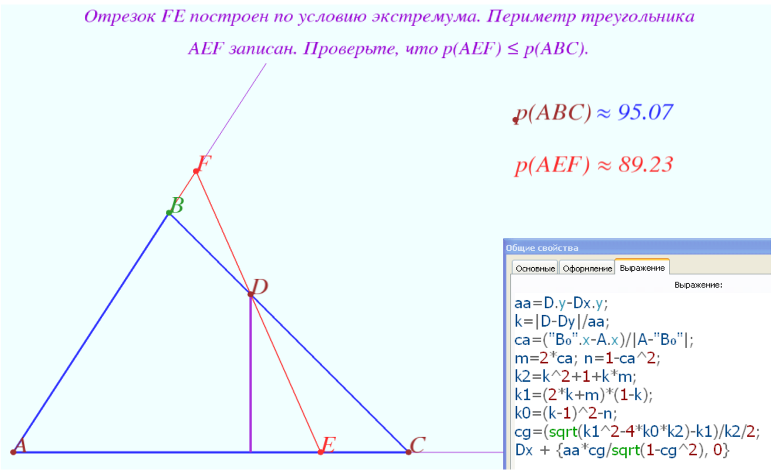
Решение. Осуществим допустимую вариацию, то есть повернём отрезок BC вокруг точки D на очень малый угол $d\varphi$ в новое положение $B'C'$. Определяем эти изменения длины всех трёх отрезков. Опустим перпендикуляр из C на $B'C'$ ($CG \perp B'C'$) и из B на $B'C'$ ($BG' \perp A'B'$). В линейном приближении равны катеты и гипотенузы: $BD \approx DG'$, $DC \approx DG$. Для малых углов поворота $d\varphi$ можно считать, что $BG' \approx BD \cdot d\varphi, CG \approx CD \cdot d\varphi$. Сумма длин отрезков AB, AC и BC в точке экстремума не изменилась, значит: $C'G + CC' \approx B'G' + BB'$.

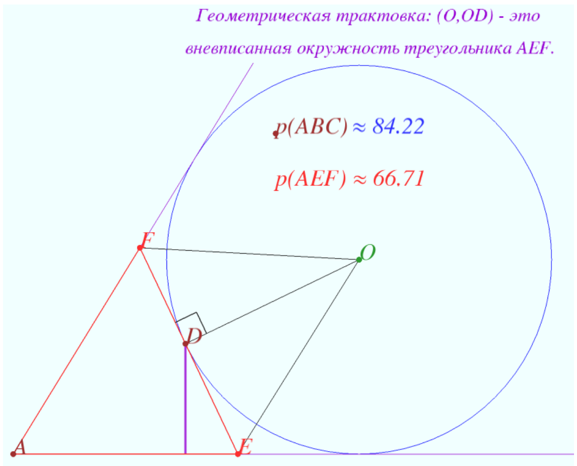
$$C'G \approx CG\, ctg \angle ACB,\ C'C \approx \frac{CG}{\sin \angle ABC},\ B'G' \approx BG'\, ctg \angle ABC,\ B'B \approx \frac{BG'}{\sin \angle ABC}$$

$CD\, d\varphi\, ctg \frac{\angle ACB}{2} \approx BD\, d\varphi\, ctg \frac{\angle ABC}{2}$. В пределе $d\varphi \to 0$ получаем условие экстремума:

$$CD\, ctg \frac{\angle ACB}{2} = BD\, ctg \frac{\angle ABC}{2}.$$

Выполнив необходимые преобразования, найдём уравнение для поиска кратчайшего отрезка EF. Пусть $\alpha = \angle A, \beta = \angle DEA, \gamma = \angle DEA, \alpha + \beta + \gamma = \pi. a(b)$ – расстояние от D до AE(AF). Тогда условие примет вид $a(1-\cos\gamma) = b(1-\cos\beta), \beta + \gamma = \pi - \alpha$. Система сводится к квадратному уравнению для $\cos\beta$. Решив эту систему, найдём $x_E - x_D = a\, ctg\, \beta$. Вычисления выполнены в аналитическом сервисе программы GinMA. Геометрическая трактовка полученного результата – следующая. Окружность, касающаяся EF извне в точке D лявляется вневписанной окружностью треугольника AEF.





Периметр треугольника AEF не больше, чем ABC ***Вневписанная окружность касается EF в D***

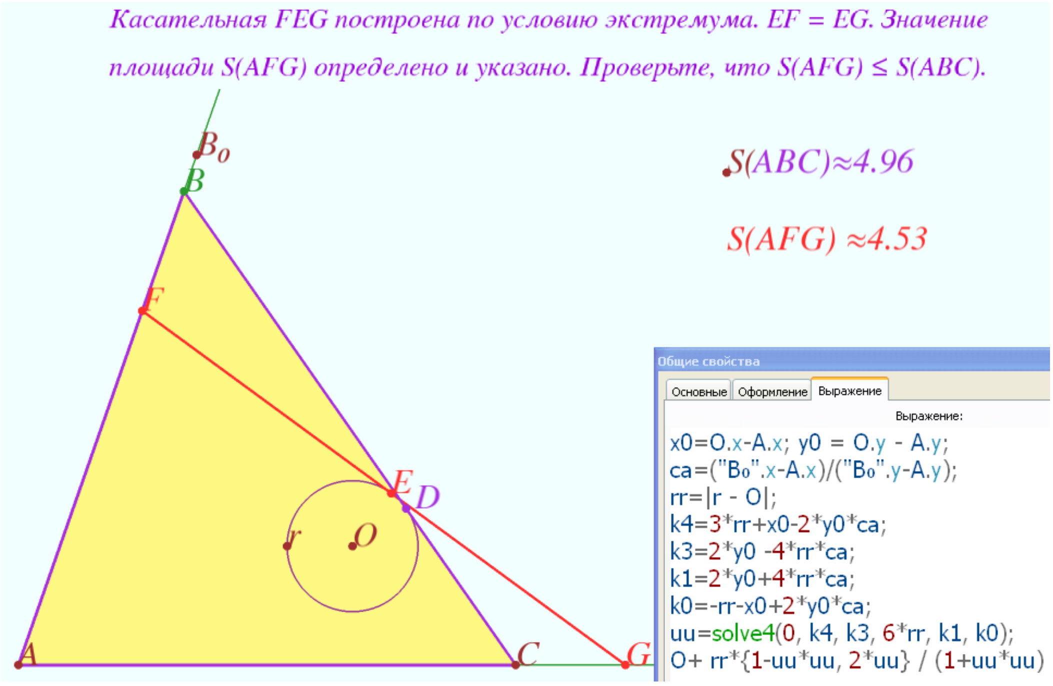
Задача 7. Треугольник наименьшей наименьшей площади с данным углом

Задание. Окружность $\omega(O,r)$ находится внутри угла A. Касательная к ω отсекает от угла треугольник ABC. Найдите треугольник наименьшей площади, содержащий ω внутри.

Исследование. Задайте конфигурацию, пользуясь точками A, B_0, O, r и D. Двигайте точку C. Найдите наименьшую площадь при выбранных параметрах задачи.

Решение. Осуществим допустимую вариацию, то есть повернём отрезок BC вокруг точки D на очень малый угол $d\varphi$ в новое положение $B'C'$. В точке экстремума площади треугольников ABC и $AB'C'$ равны. Значит, равны и площади треугольников $BD'B'$ и CDC'. У них равные малые углы при вершинах D и D'. В линейном приближении равны стороны $BD' \approx B'D'$, $DC \approx DC'$. Для малых углов поворота $d\varphi$ можно считать, что равенство площадей сведётся к равенству отрезков $BD = CD$.

Выполнив необходимые преобразования, найдём уравнение для поиска точки E. Котангенс половины угла наклона OE к стороне угла АС определяем из уравнения четвёртой степени. Вычисления выполнены в аналитическом сервисе программы GinMA.



Треугольник AFG имеет наименьшую площадь (не больше, чем ABC)

Задача 8. Четырёхугольник наименьшей наименьшей площади с данным углом

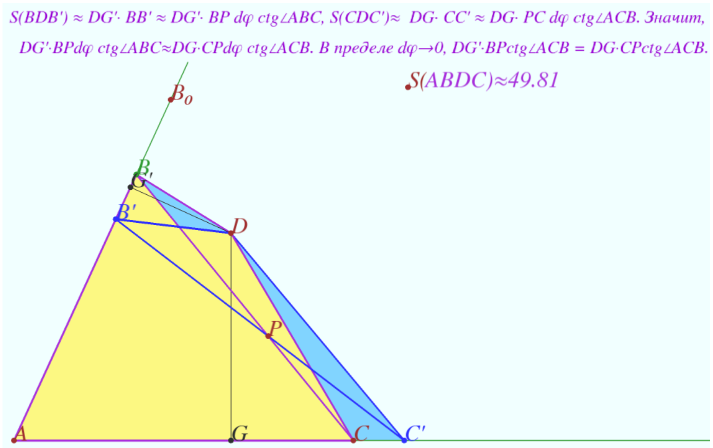
Задание. Точки P и D находятся внутри угла A. Постройте отрезок BC содержащий P так, чтобы площадь четырёхугольника $ABDC$ была наименьшей.

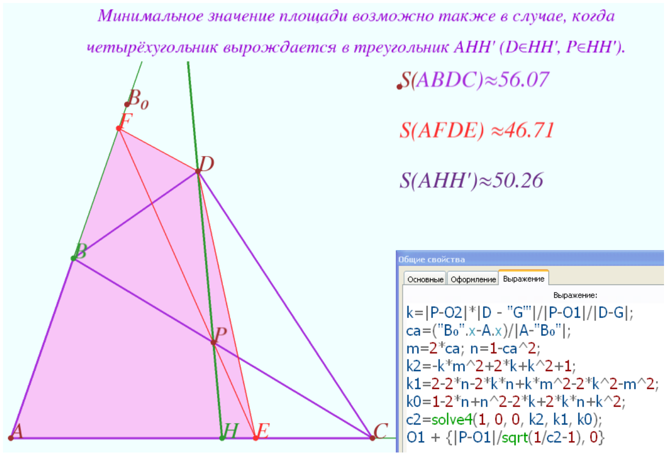
Исследование. Задайте конфигурацию, пользуясь точками ***A, B₀, P*** и ***D.*** Двигайте точку ***C.*** Найдите наименьшую площадь при выбранных параметрах задачи.

Решение. Осуществим допустимую вариацию, то есть повернём отрезок BC вокруг точки P на очень малый угол $d\varphi$ в новое положение $B'C'$. В точке экстремума площади четырёхугольников $ABDC$ и $AB'DC'$ равны. Значит, равны и площади треугольников $BD'B'$ и CDC'. Следовательно, $S_{BDB'} = DG'\cdot BB' \approx DG'\cdot BP\, d\varphi\, ctg\angle ABC$, $S_{CDC'} = DG\cdot CC' \approx DG\cdot PC\, d\varphi\, ctg\angle ACB$. Значит, $DG'\cdot BP\, d\varphi\, ctg\angle ABC \approx DG\cdot CP d\varphi\, ctg\angle ACB$. В пределе $d\varphi \to 0$, находим условие экстремума:

$$DG'\cdot BPctg\angle ACB = DG\cdot CPctg\angle ACB.$$

Выполнив вычисления, получим квадратное уравнение для $ctg^2\angle ACB$ пользуясь которым строим точку E — оптимальное положение C. Вычисления выполнены в аналитическом сервисе программы GinMA. Минимальное значение площади возможно также в случае, когда четырёхугольник вырождается в треугольник AHH' ($D\in HH'$, $P\in HH'$).





Допустимое варьирование

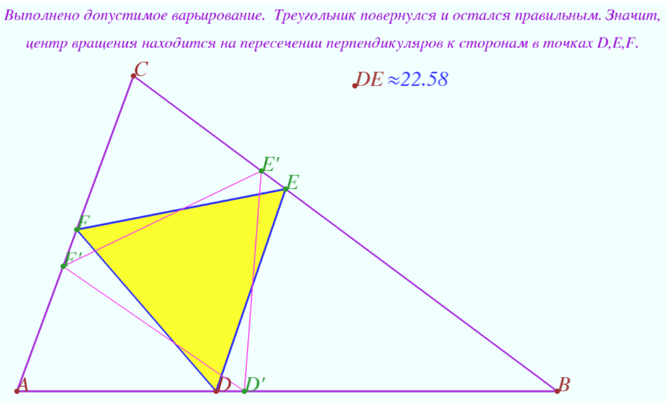
Четырёхугольник наименьшей площади

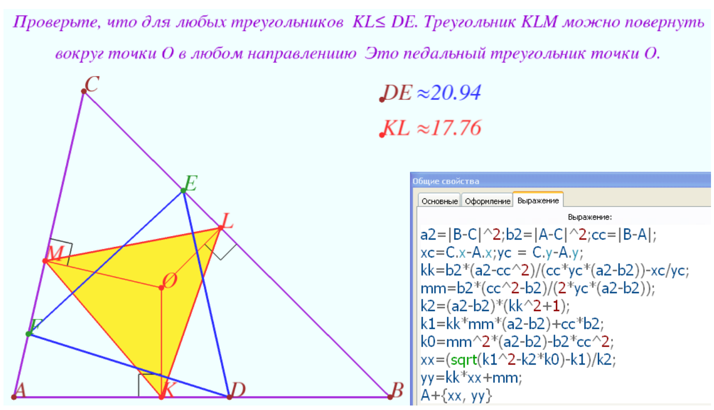
Задача 9. Наибольший правильный вписанный треугольник

Задание. Для заданного треугольника *ABC* постройте наибольший правильный вписанный треугольник.

Исследование. Задайте конфигурацию, пользуясь точками ***A, B*** и ***C.*** Двигайте точку ***D.*** Найдите наибольшую площадь при выбранных параметрах задачи.

Решение. Осуществим допустимую вариацию, то есть переместим правильный треугольник *DEF* в новое положение *D'E'F'*. В точке экстремума треугольники *DEF* и *D'E'F'* равны. Значит, треугольник просто повернулся. Центр вращения находится на пересечении перпендикуляров к сторонам в точках *D, E* и *F*. Следовательно, искомый правильный треугольник является подерным треугольником некоторой точки *O*. Поиск *O* сводится к решению квадратного уравнения. Вычисления выполнены в аналитическом сервисе программы GinMA.





Допустимое варьирование

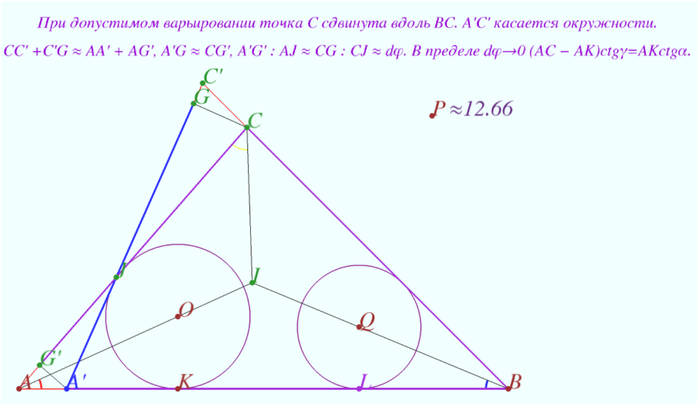
Наибольший правильный вписанный треугольник

Задача 10. Треугольник наименьшего периметра, содержащий две окружности

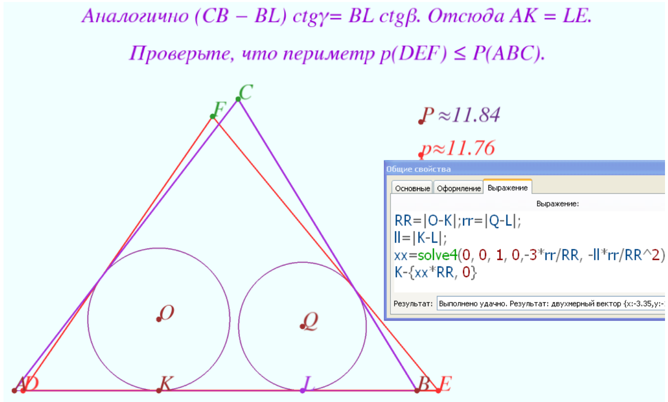
Задание. Даны две окружности. Постройте треугольник наименьшего периметра, содержащий эти окружности.

Исследование. Задайте конфигурацию, пользуясь точками ***O, Q*** и ***K.*** Двигая точки ***A*** и ***B,*** найдите наименьший возможный периметр при выбранных параметрах задачи.

Решение. Рассматриваем треугольники, сторона AB которых касается обеих окружностей. Пусть $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle CBA = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$, $AK = x$, $BL = y$. При допустимом варьировании точку C сдвигаем вдоль BC. Отрезок $A'C'$ при этом касается окружности. Поскольку периметр треугольника не изменился, то $CC' + C'G \approx AA' + AG'$, $A'G \approx CG'$, $A'G' : AJ \approx CG : CJ \approx d\varphi$. В пределе $d\varphi \to 0$ получим условие экстремума $(AC - AK)ctg\gamma = AKctg\alpha$. Аналогично $(CB - BL)\ ctg\gamma = BL\ ctg\beta$. Отсюда $AK = LE$. Поиск точки D сводится к решению кубического уравнения. Вычисления выполнены в аналитическом сервисе программы GinMA.



Допустимое варьирование



Треугольник наименьшего периметра

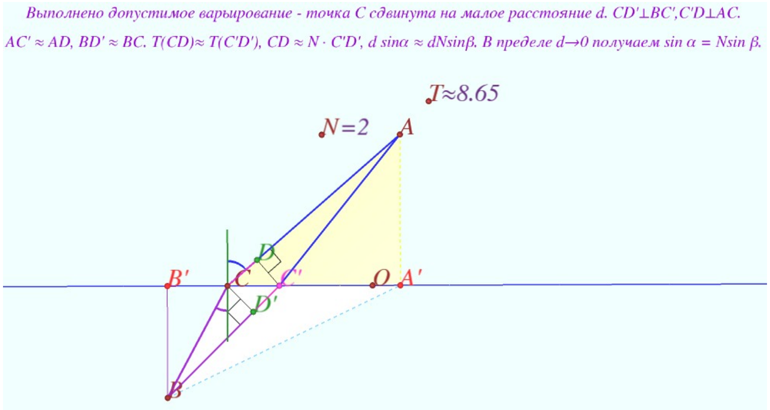
Задача 11. Путь через границу сред с наименьшим временем

Задание. Птица находится в точке A над поверхностью моря, рыба в море в точке B. Скорость птицы под водой в N раз меньше, чем в воздухе. Найдите путь птицы по которому она достигнет рыбу за наименьшее время.

Луч света проходит из точки A в точку B пересекая плоскую границу раздела сред. Отношение показателя преломления среды, содержащей B к показателю преломления среды, содержащей A, равно N. Найдите путь луча. Известно, что свет распространяется по пути с экстремальными затратами времени, скорость света обратно пропорциональна N.

Исследование. Задайте конфигурацию, пользуясь точками A, B и O. Двигая точку N, задайте отношение скоростей (коэффициент преломления). Пусть путь птицы пересекает поверхность моря в точке C. Тогда AC и BC – это отрезки, длина которых меньше длин любых кривых. Показано время T движения по выбранной траектории. Двигая C, найдите траекторию с наименьшим возможный временем.

Решение. Пусть C_1 – проекция C на вертикальную плоскость, содержащую точки A и B. Тогда $AC_1 \le AC$, $BC_1 \le BC$, время T_1 движения по пути AC_1B меньше, чем по ACB, если C не совпадает с C_1. Значит, точка C для пути наименьшего времени должна лежать на прямой, соединяющей основания перпендикуляров A' и B', опущенных из точек A и B на плоскость поверхности раздела сред. Пусть α (β) угол между AC (BC) и нормалью к плоскости моря. Выполним допустимое варьирование, то есть сдвинем точку C на малое расстояние d вдоль прямой $A'B'$. $CD' \perp BC'$, $C'D \perp AC$. $AC' \approx AD$, $BD' \approx BC$. Значит, в точке экстремума время движения птицы по CD и по $C'D'$ одинаковое. Скорость на $C'D'$ меньше, чем на CD в N раз и $CD \approx N \cdot C'D'$, $d\,sin\alpha \approx d\,N\,sin\beta$. В пределе $d \to 0$ получаем $sin\ \alpha = N\ sin\ \beta$. Поиск точки E (экстремального положения C) сводится к решению уравнения четвёртой степени. Вычисления выполнены в аналитическом сервисе программы GinMA. Проверьте, что время t движения по AEB не больше, чем время T по ACB.



Допустимое варьирование

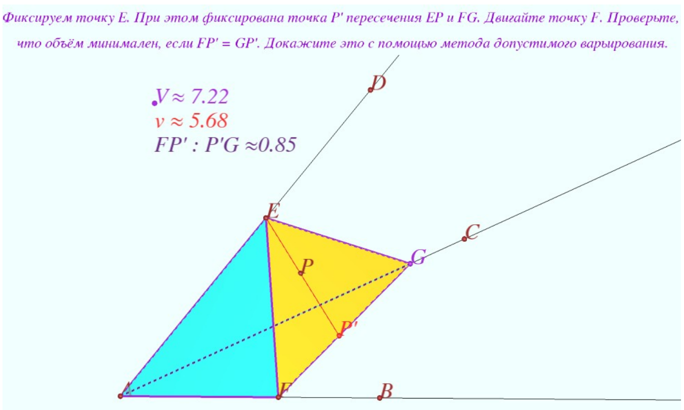
Путь с наименьшими затратами времени

Задача 12. Тетраэдр наименьшего объёма

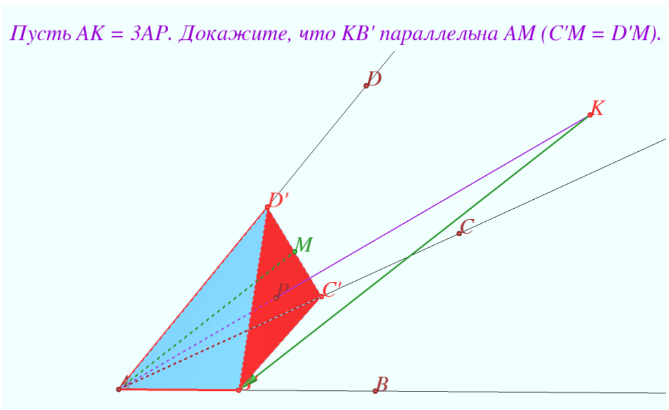
Задание. Дан трёхгранный угол $ABCD$ и точка P внутри него. Постройте тетраэдр $AEFG$ с вершинами на рёбрах угла и точкой P в грани, противолежащей вершине A, наименьшего объёма ($E\in AD$, $F\in AB$, $G\in AC$, $P\in EFG$).

Исследование. Задайте конфигурацию, пользуясь точками A, B, C, D и P. Двигая точки E и F, попытайтесь построить тетраэдр минимального объема, перемещая точки E и F. Значение V объёма $AEGF$ и минимального объёма v указаны.

Решение. Фиксируем точку E. При этом фиксирована точка P' пересечения EP и плоскости ABC, то есть точка отрезка FG. Двигая точку F, проверьте, что объём минимален, если $FP' = GP'$. Докажите это с помощью метода допустимого варьирования либо заметьте, что объём тетраэдра пропорционален произведению высоты из E, которая постоянная, и площади треугольника AFG, которая минимальна, если P' — это середина FE. Значит, для тетраэдра минимального объёма прямая EP содержит медиану треугольника EFG. Аналогично установим, что прямые FP и PG содержат медианы основания EFG. Для построения оптимального тетраэдра достаточно построить точку K на прямой AP такую, что $AK = 3AP$ и провести из этой точки прямые, параллельные граням трёхгранного угла.



Допустимое варьирование



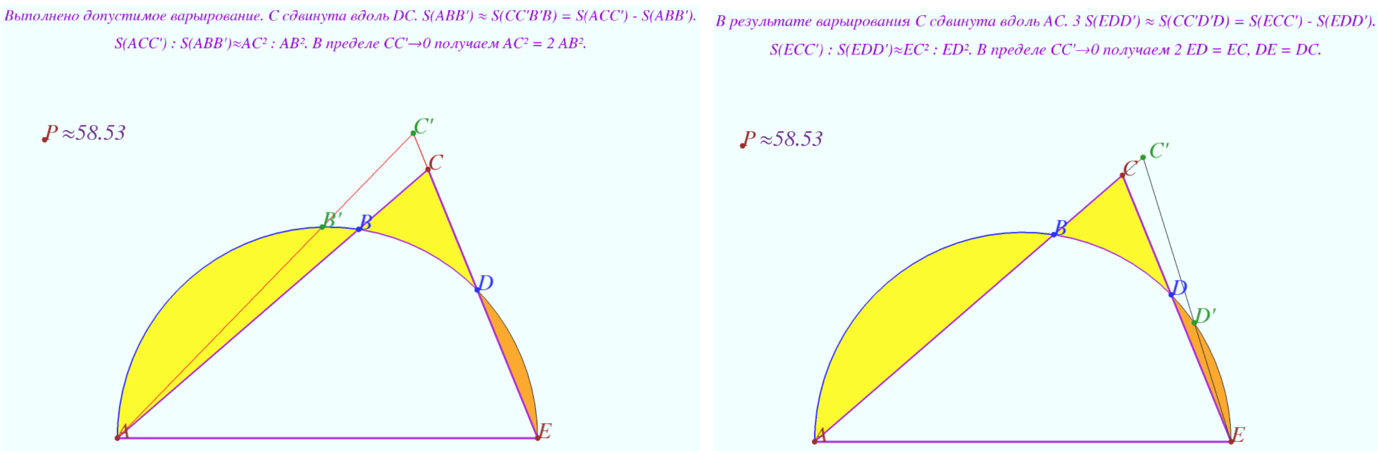
Построение тетраэдра наименьшего объёма

Задача 13. Участок земли наименьшей стоимости

Задание. Дан полукруг диаметра $AE = 20$, нарисованный на земле. Лучи CA и CE из произвольной точки C пересекают полукруг в точках B и D. Стоимость единицы площади сегмента полукруга AB и криволинейного треугольника BCD равна 1. Стоимость единицы площади сегмента полукруга DE равна 3. Найдите такое положение C, при котором стоимость участка наименьшая.

Исследование. Задайте конфигурацию, пользуясь точками A и E. Двигая точку C, попытайтесь построить фигуры наименьшей стоимости. Значение стоимости P указано.

Решение. Выполним допустимое варьирование. Точка C сдвинута вдоль прямой DC. Площади криволинейного треугольника ABB' и четырёхугольника $CC'B'B$ должны быть равны. То есть площадь треугольника ABB' равна половине площади треугольника ACC'. Малые углы A этих треугольников совпадают, значит, отношение площадей равно квадрату отношения сторон, содержащих малый угол $S_{ACC}':S_{ABB}' \approx AC^2 : AB^2$. В пределе $CC' \to 0$ получаем $AC^2 = 2\text{AB}^2$. Выполним допустимое варьирование. Точка C сдвинута вдоль прямой AC. Стоимости криволинейного треугольника EDD' и четырёхугольника $CDD'C'$ должны быть равны. Площадь криволинейного треугольника EDD' должна составить треть площади четырёхугольника $CC'B'B$ или четверть площади треугольника ECC'. Отношение площадей $S_{ECC}':S_{EDD}' \approx CE^2 : DE^2$. В пределе $CC' \to 0$ получаем $2ED = EC$, $DE = DC$. Поиск точки C_0 в которой достигается минимальная стоимость сводится к решению линейного уравнения. Двигая точку C, проверьте, что стоимость участка минимальна, C совпадает с C_0.



Допустимое варьирование при минимизации стоимости участка

Литература

1. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике. –М.: «НАУКА», 1986. – 544 с.

2. В.В.Шеломовский. Экстремумы. –Мурманск.: МГПУ, Физматкнига, 2005. – 160 с. ISBN 5-88476-706-4.